А. А. ЗИНОВЬЕВ

КОМПЛЕКСНАЯ ЛОГИКА

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

А. А. ЗИНОВЬЕВ

КОМПЛЕКСНАЯ ЛОГИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1970

В книге дается систематическое изложение формального аппарата разработанной автором комплексной логики. В ней рассматривается общая теория дедукции и ее расширения, включая теорию предикации, кванторов, условных форм, модальностей, существования, норм, терминов, отношений и физического следования. Автор приводит доказательства непротиворечивости и полноты систем комплексной логики относительно определенных семантических интерпретаций, выясняет место классической и интуиционистской логик в теории логического следования.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

П. В. ТАВАНЕЦ

1-5-7
№ 86-70(I)

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Цель книги

В данной книге дается систематическое изложение теории логического следования (вывода, дедукции), которая разрабатывалась автором в работах [3—8] и названа комплексной логикой. Сравнительно с упомянутыми работами здесь внесены значительные изменения и дополнения. Кроме того, здесь использованы работы других советских логиков [1, 2, 9—16], посвященные проблемам комплексной логики. Автор рассматривает излагаемую теорию не как окончательную по виду отдельных ее разделов и по широте охвата проблем логики, но лишь как первоначальный вариант, который может быть усовершенствован и развит детальнее.

§ 2. Предмет логики

Логика изучает термины и высказывания, конкретнее говоря — правила, по которым из данных терминов и высказываний образуются новые термины и высказывания и которые позволяют судить о значениях одних терминов и высказываний на основе сведений, которые имеются относительно значений других. Подробнее это рассмотрено в [3, 4].

Термины и высказывания образуются из данных терминов и высказываний так, что при этом последние определенным образом группируются в пространстве и времени, модифицируются и соединяются с особого рода предметами, изобретенными специально для этой цели. Эти предметы мы будем называть логическими операторами. Логика, определяя свойства различного рода конструкций из терминов и высказываний, определяет тем самым и свойства логических операторов, поскольку они являются в известном смысле показателями (или представителями) типов структур терминов и высказываний. И в этом смысле логика есть наука о логических операторах.

§ 3. Логические операторы

Роль логических операторов в языке выполняют слова «и», «или», «не», «нет», «но», «все», «некоторые» и т. п., а также запятые, точки и другие средства языка. В логике для изображения логических операторов изобретаются особого рода символы не только для удобства записи и обозримости утверждений логики, но прежде всего потому, что одни и те же языковые средства выполняют различные функции, а в качестве одних и тех же логических операторов используются различные языковые средства.

Логические операторы разделяются на две группы:

1) терминообразующие операторы (например, слово «который» в выражении «число, которое делится на семь»);

2) высказываниеобразующие операторы (например, слово «не» в предложении «Число тринадцать не делится на семь»).

Имеются логические операторы, которые относятся только к первой группе (например, оператор «который»), которые относятся ко второй группе (например, операторы «все» и «некоторые») и которые могут относиться к первой и второй группе (таковы, например, операторы «и», «или», «не»). Какими являются операторы в третьем случае, всецело зависит от их положения в терминах и высказываниях.

Мы в дальнейшем будем рассматривать следующие логические операторы:

1) $\leftarrow$, $\exists$, $\forall$, $\rightarrow$, $\urcorner$, ? — высказываниеобразующие операторы соответственно «имеют признак» («характеризуется тем, что» и т. п.), «некоторые», «все», «если то», отрицание «не» и оператор неопределенности, употребляемые (последние два) только совместно с предшествующими четырьмя операторами;

2) $\downarrow$, [ ] — терминообразующие операторы «который», и «термин (или высказывание)...»;

3) $\cdot$, :, $\vee$, $\sim$ — логические операторы «и», («каждый из»), «или» сильное («одно и только одно из»), «или» ослабленное («по крайней мере одно из») и «не», которые могут играть роль как терминообразующих, так и высказываниеобразующих операторов.

Будем употреблять также круглые скобки, запятые и точки, но не в качестве логических операторов, а в качестве подсобных средств языка, регулирующих однозначность чтения сложных символов, определяющих их границы и строение.

§ 4. Термины

Термины разделяются на субъекты и предикаты. Мы предполагаем, что даны какие-то предметы, относительно которых известно, что они суть простые субъекты и простые предикаты. Правила образования субъектов и предикатов из простых субъектов и предикатов и высказываний задаются определениями такого вида.

$D1$ Предикат:

1) простые предикаты суть предикаты;

2) если a есть предикат, то $\sim a$ и $\tilde{a}$ суть предикаты;

3) если $a^1,\ldots, a^n$ $(n \geqslant 2)$ суть предикаты, то $(a^1 \cdot \ldots \cdot a^n)$ и $(a^1 \vee \ldots \vee a^n)$ суть предикаты;

4) если $a^1,\ldots,a^n$ $(n \geqslant 2)$ суть предикаты, то $\cdot(a^1,\ldots,a^n)$ и $\vee(a^1,\ldots,a^n)$ суть предикаты;

5) если x есть высказывание, то $x\downarrow$ есть предикат;

6) если x есть высказывание, а a есть предикат, то $a\downarrow x$ есть предикат;

7) нечто есть предикат лишь в силу пунктов 1—6.

$D2$ Субъект:

1) простые субъекты суть субъекты;

2) если a есть субъект, то $\sim a$ и $\tilde{a}$ суть субъекты;

3) если $a^1,\ldots,a^n$ $(n \geqslant 2)$ суть субъекты, то $(a^1\cdot\ldots\cdot a^n)$ и $(a^1 \vee \ldots \vee a^n)$ суть субъекты;

4) если $a^1,\ldots,a^n$ $(n \geqslant 2)$ суть субъекты, то $\cdot\,(a^1,\ldots,a^n)$ и $\vee\,(a^1,\ldots,a^n)$ суть субъекты;

5) если $a^1,\ldots,a^n$ $(n \geqslant 2)$ суть субъекты, то $(a^1,\ldots,a^n)$ есть субъект;

6) если x есть высказывание, то $\downarrow x$ есть субъект.

7) если x есть высказывание, а a есть субъект, то $a \downarrow x$ есть субъект;

8) если a есть высказывание, субъект или предикат, то $[a]$ есть субъект;

9) нечто есть субъект лишь в силу пунктов 1—8.

$D3$. Субъекты и предикаты (и только они) суть термины.

Термины, указанные в $D1$ и $D2$, читаются так:

1) $\sim a$ — предмет, не обозначаемый термином a.

2) $(a^1\cdot\ldots\cdot a^n)$ — предмет, обозначаемый каждым из терминов $a^1, \ldots, a^n$;

3) $(a^1 \vee \ldots \vee a^n)$ — предмет, обозначаемый по крайней мере одним из терминов $a^1, \ldots, a^n$;

4) $\cdot\,(a^1, \ldots, a^n)$ — каждый из предметов $a^1, \ldots, a^n$;

5) $\vee\,(a^1, \ldots, a^n)$ — по крайней мере один из предметов $a^1, \ldots, a^n$;

6) $\tilde{a}$ — предмет не-a (противоположный a);

7) $\downarrow x$ — тот факт, что x;

8) $x \downarrow$ — такой, что x;

9) $a \downarrow x$ — a такой, что x;

10) $[a]$ — термин a.

§ 5. Высказывания

Субъект, указанный в пункте 5 определения *Д*2 предшествующего параграфа, называется одноместным при $n = 1$, двуместным при $n = 2$ и т. д., вообще — энместным в зависимости от n.

Предикаты в свою очередь разделяются на одноместные, двуместные и т. д. (вообще на энместные, где $n \geqslant 1$). Мы предполагаем, что это разделение дано каким-то образом, т. е. предполагаем известным, каким является тот или иной предикат с этой точки зрения.

Если даны термины и выполнено только что приведенное допущение, то правила образования высказываний из терминов и высказываний задаются определениями такого вида.

*D*1. $(a \leftarrow b)$, $(a \urcorner \leftarrow b)$ и $(a? \leftarrow b)$ суть основные высказывания, если и только если a есть субъект, а b — предикат, причем, если a есть энместный субъект, то b есть столь же местный (энместный) предикат.

Высказывания, указанные в *D*1, читаются так:

1) $(a \leftarrow b)$ — «a имеет признак b»; «a имеет b»; «a характеризуется тем, что b»; «b присущ a» и т. п.;

2) $(a \urcorner \leftarrow b)$ — «a не имеет b»;

3) $(a? \leftarrow b)$ — «a неопределенно имеет b (нельзя установить $(a \leftarrow b)$ или $(a \urcorner \leftarrow b)$; не известно, $(a \leftarrow b)$ или $(a \urcorner \leftarrow b)$)».

*D*2. Высказывание:

1) основные высказывания суть высказывания;

2) если x есть высказывание, то $\sim x$ есть высказывание;

3) если $x^1, \ldots, x^n$ $(n \geqslant 2)$ суть высказывания, то $(x^1 \cdot \ldots \cdot x^n)$, $(x^1 : \ldots : x^n)$ и $(x^1 \vee \ldots \vee x^n)$ суть высказывания;

4) если a есть термин, а x есть высказывание, то $(\forall a)\, x$, $(\exists a)\, x$, $(\urcorner \forall a)\, x$, $(\urcorner \exists a) x$; $(? \forall a)\, x$ и $(? \exists a)\, x$ суть высказывания;

5) если x и y суть высказывания, то $(x \rightarrow y)$, $(x \urcorner \rightarrow y$ и $(x? \rightarrow y)$ суть высказывания;

6) нечто есть высказывание лишь в силу 1—5.

$D3$. Высказываниеобразующий оператор будем называть главным в данном высказывании в таких случаях:

1) $\leftarrow$ есть главный оператор в $(a \leftarrow b)$, $(a \urcorner \leftarrow b)$ и $(a? \leftarrow b)$;

2) $\cdot$ есть главный оператор в $(x^1 \cdot \ldots \cdot x^n)$, $\vee$ — главный в $(x^1 \vee \ldots \vee x^n)$,: — главный в $(x^1 : \ldots : x^n)$;

3) $\forall$ есть главный оператор в $(\forall a)\, x$, $(\urcorner \forall a) x$ и $(? \forall a)\, x$; $\exists$ — главный в $(\exists a)\, x$, $(\urcorner \exists a)\, x$ и $(? \exists a)\, x$;

4) $\rightarrow$ есть главный оператор в $(x \rightarrow y)$, $(x \urcorner \rightarrow y)$ и $(x? \rightarrow y)$;

5) оператор, являющийся главным в x, является главным и в $\sim x$.

Высказывания, указанные в $D2$, читаются так:

1) $\sim x$ — «Не-x», «Не так, как говорится в x»;

2) $(x^1 \cdot \ldots \cdot x^n)$ — «x^1 и x^2 и...и x^n», «Каждое из $x^1, \ldots, \ldots, x^n$)»;

3) $(x^1 : \ldots : x^n)$ — «Либо $x^1, \ldots$, либо x^n», «Одно и только одно из $x^1, \ldots, x^n$»;

4) $(x^1 \vee \ldots \vee x^n)$ — «x^1 или... или x^n», «По крайней мере одно из $x^1, \ldots, x^n$»;

5) $(\forall a)\, x$, $(\exists a)\, x$, $(\urcorner \forall a)\, x$, $(\urcorner \exists a)\, x$, $(? \forall a)\, x$, $(? \exists a) x$ — соответственно «Все a таковы, что x», («Для всех a имеет силу x» и т. п.), «Некоторые a таковы, что x», «Не все a таковы, что x», «Нет таких a, что x», «Неопределенно (нельзя установить, не известно и т. п.), $(\forall a)\, x$ или $(\urcorner \forall a)\, x$», «Неопределенно, $(\exists a)\, x$ или $(\urcorner \exists a)\, x$»;

6) $(x \rightarrow y)$, $(x \urcorner \rightarrow y)$, $(x? \rightarrow y)$ — соответственно «Если x, то y» («Признание x обязывает признать y»), «Признание x не обязывает признать y», «Неопределенно, $(x \rightarrow y)$ или $(x \urcorner \rightarrow y)$».

§ 6. Расширения алфавита и правил образования

Приведенный алфавит логических операторов и перечень правил образования терминов и высказываний не исчерпывают сферу логики. В частности, помимо кванторов «все» и «некоторые» употребляются операторы «один», «два», «большинство», «меньшинство», «третья часть» и т. п. (см. [3]); помимо обычной конъюнкции «и» употребляются упорядоченные «и затем», «и до этого», «и справа от этого» и т. п. Мы привели лишь операторы и правила образования терминов и высказываний, рассмотрение которых образует ядро логики, а также основу и образец для рассмотрения других операторов и правил. И в дальнейшем по мере изложения мы будем осуществлять некоторые расширения такого рода, каждый раз поясняя их место и отношение к фундаментальным логическим объектам.

§ 7. Вхождение

*D*1. Одно высказывание входит в другое (есть вхождение в другое), если и только если первое есть графическая часть второго. Аналогично — для вхождения термина в высказывание, высказывания в термин, термина в термин и логического оператора в термин и высказывание. Высказывание входит само в себя. Термин входит сам в себя.

Согласно *D*1 не всякая графическая часть высказывания есть вхождение в него другого высказывания, если даже в нее и входят высказывания. Например, $x : y$ графически есть часть высказывания $(x : y : z)$, однако в последнее не входит высказывание $(x : y)$, ибо по определению высказывания выражение $x : y$ не есть высказывание (отсутствуют внешние скобки). Аналогично в высказывание $(x \cdot y \cdot z)$ не входит высказывание $(x \cdot y)$, хотя в него входит каждое из x и y. Аналогичное положение имеет силу для соотношений терминов и высказываний, а также терминов и терминов, являющихся их частями. Короче говоря, не всякая часть термина или высказывания есть вхождение в него термина или высказывания.

§ 8. Логическое следование

Будем употреблять символ $\vdash$ как знак логического следования (в смысле «из... логически следует...»). Выражение вида $x \vdash y$ будет читаться буквально так: из высказывания x логически следует высказывание y. Слово «логическое» («логически») в выражении «логическое следование» («логически следует») будем для краткости опускать и говорить просто «следование» («следует»).

$D1$. $x \vdash y$ есть утверждение (или формула) следования, если и только если x и y суть высказывания.

$D2$. Высказывание x в $x \vdash y$ называется посылкой для y, высказывание y — заключением (или следствием) высказывания x.

Утверждение $x \vdash y$ не есть высказывание, состоящее из высказываний x и y. Это — высказывание, состоящее из двух терминов «высказывание x» и «высказывание y», обозначающих высказывания соответственно x и y, и двухместного предиката «из первого следует второе». Если записать его в соответствии с определениями, данными в параграфах 4 и 5, то оно примет такой вид: $([x], [y] \leftarrow (\vdash))$. Так что оно является простым высказыванием.

$D3$. Вхождение высказывания в формулу следования;

1) высказывание x входит в формулы следования $x \vdash y$ и $y \vdash x$;

2) если высказывание x входит в высказывание y, а y входит в формулу следования $z \vdash v$, то x входит в $z \vdash v$.

3) высказывание входит в формулу следования только в силу 1 и 2.

$D4$. Вхождение термина в формулу следования: термин a входит в $x \vdash y$, если и только если он входит в x или (не исключающее «или») в y.

Символ $\vdash$ будем употреблять также как знак того, что высказывания принимаются из чисто логических соображений. При этом выражение $\vdash x$ можно рассматривать как следование x из пустого множества посылок (как вырожденное следование).

$D5$. $\vdash x$ есть формула вырожденного следования, если и только если x есть высказывание.

$D6$. Высказывание x входит в $\vdash x$; если высказывание (или термин) y входит в x, то y входит в $\vdash x$.

Выражение $\vdash x$ точно также не есть высказывание, состоящее из высказывания x и оператора $\vdash$. Символ $\vdash$ не есть логический оператор. Это — особый предикат «принимается из логических соображений» («логически истинно» и т. п.). А выражение $\vdash x$ есть элементарное высказывание $([x]) \leftarrow (\vdash)$), состоящее из субъекта $[x]$ и предиката $\vdash$.

Учитывая сказанное, мы в дальнейшем будем рассматривать только такие формулы следования, которые содержат один и только один символ $\vdash$. Выражение вида $(x \vdash (y \vdash z))$, $(x \vdash y) \vdash z$, $(x \vdash y)\ (z \vdash v) \vdash (a \vdash b)$ и т. п., в которых символ $\vdash$ встречается два и более раза, фигурировать у нас не будут. Такого рода выражения на самом деле лишь сокращенная запись высказываний соответственно $([x],\ [([y],\ [z]) \leftarrow (\vdash)]) \leftarrow (\vdash)$, $([([x],\ [y]) \leftarrow (\vdash)],\ [z]) \leftarrow$ $\leftarrow (\vdash)$ и т. п. Логические правила для таких высказываний получаются как производные от правил, рассматриваемых в данной книге.

§ 9. Классический и неклассический случаи

Будем различать классический и неклассический случаи в теории следования по такому признаку: в системах для неклассического случая будут фигурировать два различных оператора отрицания и оператор неопределенности, в системах же для классического случая операторы отрицания не различаются (остается одно отрицание), а оператор неопределенности отсутствует. Смысл различения двух видов отрицания и введения оператора неопределенности подробно разъяснен в работах [3, 4].

Такое употребление выражений «классический» и «неклассический» отличается от принятого в логике их употребления: неклассическими системами принято называть системы, которые уже классического исчисления предикатов по классу доказуемых формул. Однако упомянутое сужение класса доказуемых формул поддается разумному и простому (на наш взгляд) объяснению лишь при условии различения двух форм отрицания (или двух различных позиций отрицания) в высказываниях. В дальнейшем мы будем рассматривать системы, которые можно истолковать как сужение классической логики, но в которых фигурирует только один оператор отрицания и отсутствует оператор неопределенности, а также системы с двумя отрицаниями и с оператором неопределенности, содержащие в себе (в известном смысле) системы классической логики. Потому принятое деление систем логики на классические и неклассические оказывается здесь неопределенным и даже противоречивым. И потому мы от него отказались.

§ 10. Технические замечания

При построении логических систем (исчислений) в дальнейшем будем употреблять выражения «аксиомная схема» и «теоремная схема» в смысле, несколько отличном от принятого в логике. Дело в том, что мы не будем вводить в алфавит наших систем переменные символы (пропозициональные переменные, индивидные переменные и т. п.). Мы будем использовать употребляемые ниже буквы x, y, z, x^1, x^2, ..., a, b, c, ... и т. д. как переменные в следующем смысле: 1) каждая буква по отдельности будет обозначать любое высказывание или любой термин (что именно, будет ясно из контекста), а также высказывание или термин задаваемого контекстом типа; 2) различие же совместно встречающихся (в одном утверждении, в одной формуле, в одном рассуждении) букв будет означать, что термины (или высказывания) могут как-то различаться (если в контексте не сказано, как именно они различаются).

Такое использование букв соответствует употреблению переменных метасимволов. Введение переменных символов в алфавит логических систем не избавляет от необходимости введения переменных метасимволов, тогда как употребление последних делает первые практически излишними. В случае индуктивных доказательств мы можем любую букву использовать в качестве объекта для базисного шага, просто приписав ей необходимые для этого свойства (сказав, например, «Пусть a есть элементарный термин»).

Кроме того, мы будем использовать употребляемые ниже буквы как обозначения именно высказываний и терминов, а не как лишенные значения символы, нуждающиеся в интерпретации. Поэтому формулируемые нами логические системы по способу построения суть теории, описывающие свойства высказываний и терминов определенного вида. Никаких дополнительных формальных трудностей из-за этого не возникает, зато с самого начала исключаются спекуляции на счет особенностей логических построений и их отношения к реальным языкам.

Так что в дальнейшем, принимая $x \vdash y$ (или $\vdash x$) как аксиомную схему в некоторой логической системе, мы будем иметь в виду следующее: если x и y суть высказывания, то формула следования $x \vdash y$ (или $\vdash x$) принимается в данной системе. Аналогично для терминов. В правилах вывода будет предполагаться, что употребляемые буквы суть высказывания (или термины).

Конечно, в данном случае можно было бы просто говорить об аксиомах (или постулатах) в том смысле, в каком говорят о них в научных теориях вообще. Но мы все же будем говорить о схемах аксиом, предполагая связь с логической традицией: наши системы легко превращаются в исчисления, отвечающие традиции (с точки зрения правил построения, а не содержания), путем незначительных модификаций. Так, если в излагаемой ниже общей теории дедукции вместо элементарных высказываний говорить о пропозициональных переменных, то получим обычные (по форме) исчисления с аксиомными схемами.

К теоремным схемам относится сказанное выше об аксиомных схемах. Доказать теоремную схему $x \vdash y$ или $\vdash x$, значит доказать, что это утверждение верно для любых высказываний (терминов) с такой структурой, какая указана в x и y.

Определения будем нумеровать символами Di и $Dikl$, аксиомные схемы — Ai и $Aikl$, теоремные схемы — Ti и $Tikl$, где i есть номер определения, аксиомной или теоремной схемы в данном параграфе, k — номер главы, l — номер параграфа. При доказательстве теоремных схем в некоторых случаях будем под их формулировкой записывать шаги доказательства. Справа от теоремных схем в квадратных скобках будем писать, на основе каких теоремных схем и правил вывода получается соответствующая теоремная схема или сделан соответствующий шаг в ее доказательстве.

Утверждения о свойствах формул логической системы суть метаутверждения по отношению к теоремам этой системы. Будем их нумеровать символами вида MTi и $MTikl$, где i, k и l те же, что и выше.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

СИЛЬНОЕ СЛЕДОВАНИЕ

§ 1. Система S^1

Логические операторы:

1) $\cdot$ — конъюнкция («и», «каждое из»);

2) $:$ — сильная дизъюнкция («либо», «одно и только одно из»);

3) $\sim$ — отрицание («не», «не так»).

*D*1. Высказывания, которые нельзя расчленить на другие высказывания и логические операторы $\cdot$, $:$ и $\sim$, суть элементарные относительно S^1 высказывания.

*D*2. Высказывание:

1) элементарные относительно S^1 высказывания суть высказывания;

2) если x есть высказывание, то $\sim x$ есть высказывание;

3) если $x^1, \ldots, x^n$ $(n \geqslant 2)$ суть высказывания, то $(x^1 \cdot \ldots \cdot x^n)$ и $(x^1 : \ldots : x^n)$ суть высказывания;

4) нечто есть высказывание лишь в силу 1—3.

Для упрощения записи будем скобки в ряде случаев опускать, полагая, что конъюнкция связывает сильнее дизъюнкции, а обе они — сильнее знака следования. Знаки конъюнкции будем опускать записывая соединяемые ими формулы рядом, без интервала.

Аксиомные схемы S^1:

*A*1. $x \vdash \sim\sim x$

*A*2. $\sim\sim x \vdash x$

*A*3. $xy \vdash x$

$A4.\ xy \vdash yx$

$A5.\ x^1x^2 \ldots x^n \vdash y,$

где y отличается от $(x^1x^2 \ldots x^n)$ лишь какой-то расстановкой скобок, удовлетворяющей $D2$.

$A6.\ y \vdash x^1x^2 \ldots x^n,$

где y то же, что в $A5$.

$A7.\ \sim(xy) \vdash \sim xy : x \sim y : \sim x \sim y$

$A8.\ \sim xy : x \sim y : \sim x \sim y \vdash \sim(xy)$

$A9.\ \sim(x : y) \vdash xy : \sim x \sim y$

$\sim(x^1 : x^2 : \ldots : x^n) \vdash y^1 : y^2 : \ldots : y^m,$

где $y^1, y^2, \ldots, y^m$ есть множество попарно различных высказываний, в которые включаются $(x^1x^2 \ldots x^n)$ и всевозможные высказывания, отличающиеся от него наличием одного и только одного оператора отрицания перед всеми $x^1, x^2, \ldots$ x^n или перед i из них, где $1 \leqslant i \leqslant n - 2$.

$A10.\ xy : \sim x \sim y \vdash \sim(x : y)$

$y^1 : y^2 : \ldots : y^m \vdash \sim(x^1 : x^2 : \ldots : x^n),$

где $y^1, y^2, \ldots, y^m$ те же, что и в $A9$.

$A11.\ x^1 : x^2 : \ldots : x^n \vdash y,$

где y отличается от $(x^1 : x^2 : \ldots : x^n)$ лишь какой-то расстановкой скобок, удовлетворяющей определению $D2$.

$A12.\ y \vdash x^1 : x^2 : \ldots : x^n,$

где каждое из $x^1, x^2, \ldots, x^n$ есть либо $(\alpha^{i1} z^1 \cdot \ldots \cdot \alpha^{im} z^m)$ (где $\alpha^{i1}, \ldots, \alpha^{im}$ означают наличие или отсутствие отрицания, а все $(\alpha^{i1} z^1 \cdot \ldots \cdot \alpha^{im} z^m)$ попарно различны), либо $\sim z_1^i z_1^i z^i$, а y отличается от $(x^1 : x^2 : \ldots : x^n)$ лишь расстановкой скобок.

$A13.$ $xy : yz \vdash (x : y)\, z$

$x^1y : x^2y : \ldots : x^ny \vdash (x^1 : x^2 : \ldots : x^n)\, y$

$A14.$ $(x : y)\, z \vdash xz : y$

$(x^1 : x^2 : \ldots : x^n)\, y \vdash x^1y : x^2 : \ldots : x^n$

$(x^1 : x^2 : \ldots : x^n)\,(y^1 : \ldots : y^m) \vdash$

$\vdash x^1y^1 : \ldots : x^1y^m : x^2 : \ldots : x^n$

Аксиомные схемы $A6$, $A9$, $A10$, $A13$ и $A14$ можно рассматривать как множества аксиомных схем. Но можно также последние строки в них рассматривать как запись общих случаев, а предшествующие им строки — как частные случаи, поясняющие общие случаи.

Правила вывода S^1:

$R1$. Если $x \vdash y$ и $y \vdash z$, то $x \vdash z$

$R2$. Если $x \vdash y$ и $x \vdash z$, то $x \vdash yz$

$R3$. Если $x \vdash y$ и $y \vdash x$, то $z \vdash v$,

где v получается из z путем замены вхождения высказывания x (не обязательно всех) в z высказыванием y.

$D6$. Формула следования $x \vdash y$ доказуема в S^1 (есть теорема S^1), если и только если она есть аксиома S^1 или получается из доказуемых в S^1 формул следования по правилам вывода S^1.

Система S^1 была сформулирована (в несколько ином виде) автором в работах [3, 5, 8]. Излагаемые ниже доказательства непарадоксальности, непротиворечивости, независимости и полноты S^1 даны Г. А. Смирновым в работе [12].

§ 2. Некоторые теоремные схемы

Приведем ряд теоремных схем, которые потребуются в дальнейшем (доказательство дано Г. А. Смирновым в [12]). В качестве сокращения для $x \vdash y$ и $y \vdash x$ будем употреблять символ $x \dashv\vdash y$.

$T1.\ xy \vdash y$ [A4, A3, R1]

$T2.\ x \vdash x$ [A1, A2, R1]

$T3.\ x \vdash xx$ [T2, R2]

$T4.\ xx \vdash x$ [A3]

$T5.\ yx \vdash xy$ [A4]

$T6.\ x : y \vdash y : x$

1. $\sim (x : y) \vdash yx : \sim y \sim x$ [A9, A4, T5, R3]
2. $\sim (x : y) \vdash \sim (y : x)$ [1, A10, R1]
3. $\sim (y : x) \vdash \sim (x : y)$ [2]
4. $\sim\sim (x : y) \vdash \sim\sim (y : x)$ [2, 3, R3]
5. $x : y \vdash y : x$ [A1, 4, R1]

$T7.\ y : x \vdash x : y$ [T6].

$T8$. Доказательство правила коммутации для случая $x^1 : \ldots : x^n$ $(n \geqslant 2)$ опирается на $A5$, $A6$, $A9$—$A12$, $T6$, $T7$.

Ниже ссылки на $A1$, $A5$, $A6$, $T2$—$T8$ в большинстве случаев опускаются как очевидные.

$T9.\ (x : y)\, z \vdash xz : yz$

1. $(x : y)\, z \vdash (y : xz)\, z$ [A14, T1, R2]
2. $(x : y)\, z \vdash xz : yz$ [1, A14, R1]

$T10$. Для случая $x^1 : \ldots : x^n$ $(n \geqslant 2)$ доказательство аналогично доказательству $T9$.

$T11.\ x \vdash x : x \sim x : x \sim x$ [T3, T4, A1, A7, R1, R3]

$T12.\ x : x \sim x : x \sim x \vdash x$ [A13, T1, R1]

$T13.\ x \vdash x : x \sim x$

1. $\sim x \vdash \sim (x : x \sim x : x \sim x)$ [T11, T12, R3]
2. $x : x \sim x : x \sim x \dashv\vdash x : (x \sim x : x \sim x)$ [A11, A12]
3. $\sim x \vdash \sim (x : (x \sim x : x \sim x))$ [1, 2, R3, R1]
4. $\sim x \vdash x\, (x \sim x : x \sim x) : \sim x \sim (x \sim x : x \sim x)$ [3, A9, R1]

5. $x \sim x : x \sim x \dashv\vdash \sim (x : \sim x)$ [$A10$]

6. $\sim x \vdash x(x \sim x : x \sim x) : \sim x(x : \sim x)$

[4, 5, $R3$, $R1$]

7. $\sim x \vdash \sim x : x \sim x : x \sim x : x \sim x$

[6, $A13$, $T10$, $A12$, $R3$, $R1$]

8. $x \vdash (x : x \sim x : x \sim x) : x \sim x$ [7, $A11$, $R1$]

9. $x \vdash x : x \sim x$ [8, $T11$, $T12$, $R3$, $R1$]

$T14$. $x : x \sim x \vdash x$ [$A13$, $T1$, $R1$]

$T15$. $x : y \vdash x \sim y : \sim xy$

1. $x : y \vdash \sim (xy : \sim x \sim y)$ [$A1$, $A9$, $R3$, $R1$]

2. $x : y \vdash x \sim xy \sim y : \sim (xy) \sim (\sim x \sim y)$

[1, $A9$, $R1$]

3. $(x : y) \vdash x \sim y : \sim xy$

[2, $A7$, $A13$, $T10$, $A11$, $A12$, $T13$, $T14$, $R3$, $R1$]

$T16$. $x \sim y : \sim xy \vdash x : y$

1. $x \sim y : \sim xy \vdash \sim (x \sim xy \sim y : \sim (x \sim y) \sim (xy))$

[$A1$, $A9$, $R1$, $R3$]

2. $x \sim y : \sim xy \vdash \sim (xy : \sim x \sim y)$

[1, $A11$, $A12$, $T10$, $A8$, $A7$, $T13$, $T14$, $R3$, $R1$]

3. $x \sim y : \sim xy \vdash x : y$ [2, $A10$, $A1$, $R3$, $R1$].

$T17$. Для случая $x^1 : x^2 : \ldots : x^n$ $(n \geqslant 2)$ доказательство аналогично $T15$ и $T16$.

$T18$. $x \vdash x(x : \sim x)$ [$T13$, $A13$, $R1$]

$T19$. $x(x : \sim x) \vdash x$ [$A3$]

$T20$. $xz : y \vdash (xz : y)(x : \sim x)$

1. $xz : y \vdash xz \sim y : \sim (xz)y$ [$T17$]

2. $xz : y \vdash xz \sim y : \sim xzy : x \sim zy : \sim x \sim zy$

[1, $A8$, $A13$, $T10$, $R3$, $A12$, $A3$]

3. $xz : y \vdash (xz \sim y : \sim xzy : x \sim zy : \sim x \sim zy)(x : \sim x)$

[2, $T18$, $T19$, $R3$, $A13$, $A3$].

$4.\ xz : y \vdash x : \sim x$ [3, $T2$, $R2$]

$5.\ xz : y \vdash (xz : y)(x : \sim x)$ [4, $T2$, $R2$]

$T21.\ (xz : y)(x : \sim x) \vdash xz : y$ [$A3$]

$T22.\ (x : y)\, x \vdash \sim y$

$1.\ (x : y)\, x \vdash x : xy$ [$T10$]

$2.\ (x : y)\, x \vdash (x : xy)(y : \sim y)$ [1, $T20$, $R1$]

$3.\ (x : y)\, x \vdash \sim y : y : y$ [2, $A14$, $A13$, $A3$, $R1$]

$4.\ (x : y)\, x \vdash \sim y$ [3, $T17$, $A13$, $T1$, $R1$]

$T23.\ (x : y) \sim x \vdash y$

$1.\ (x : y) \sim x \vdash x \sim y : \sim xy$ [$A3$, $T17$, $R1$]

$2.\ (x : y) \sim x \vdash \sim x : \sim y$ [1, $T17$, $R1$]

$3.\ (x : y) \sim x \vdash (\sim x : \sim y) \sim x$ [2, $T1$, $R2$]

$4.\ (x : y) \sim x \vdash y$ [3, $T22$, $R1$].

§ 3. Некоторые сокращающие определения

$D1$. $(x \supset y)$ есть сокращение для $xy : \sim xy : \sim x \sim y$.

Символ $\supset$ есть знак материальной импликации. Последняя не имеет никакого иного смысла, кроме указанного в $D1$.

$D2$. $(x \vee y)$ есть сокращение для $\sim (\sim x \sim y)$; $x^1 \vee \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n$ есть сокращение для $\sim (\sim x^1 \sim x^2 \ldots \sim x^n)$.

Символ $\vee$ есть знак соединительной дизъюнкции и читается как «по крайней мере одно из».

Операторы $\supset$ и $\vee$ могут быть приняты как первичные. Тогда для них потребуется дополнительные аксиомные схемы:

$A15.\ x \supset y \vdash xy : \sim xy : \sim x \sim y$

$A16.\ xy : \sim xy : \sim x \sim y \vdash x \supset y$

$A17.\ x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n \vdash \sim (\sim x^1 \sim x^2 \ldots \sim x^n)$

$A18.\ \sim(\sim x^1 \sim x^2 \ldots \sim x^n) \vdash x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^2$

§ 4. Непарадоксальность

В отношении S^1 имеет силу следующая метатеорема:

*MT*1. Если $x \vdash y$ есть теорема S^1 (доказуема в S^1), то в y не входят элементарные высказывания, которые не входят в x (или в y входят только такие элементарные высказывания, которые входят в x).

Доказательство *MT*1. Случай 1: $x \vdash y$ есть аксиома S^1. Легко убедиться путем пересмотра аксиомных схем S^1, что в y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x. Случай 2: $x \vdash y$ получена из $x \vdash z$ и $z \vdash y$ по правилу *R*1. Очевидно, что если в y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в z, а в z не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x, то в y не могут входить элементарные высказывания, отсутствующие в x. Случай 3: $x \vdash y$ имеет вид $x \vdash zv$ и получена из $x \vdash z$ и $x \vdash v$ по правилу *R*2. Очевидно, что в zv входят только такие элементарные высказывания, которые входят в z или (не исключающее «или») v. И если в z и в v не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x; то в y точно также не могут входить элементарные высказывания, отсутствующие в x. Случай 4: y в $x \vdash y$ получено из x по правилу *R*3 путем замены вхождения z в x высказыванием v. Если $z \vdash v$ и $v \vdash z$ доказуемы, то множества элементарных высказываний, входящих в z и v, совпадают. Поэтому в y не могут оказаться элементарные высказывания, отсутствующие в x.

Из *MT*1 вытекают следующие метатеоремы:

*MT*2. Если $x \vdash y$ и $y \vdash x$ суть теоремы S^1, то множества элементарных высказываний, входящих в x и y, совпадают.

*MT*3. Формулы следования вида $x \vdash y{:}\sim y$, $\sim xx \vdash y$, $x \vdash \sim (\sim yy)$, $x \vdash y \supset x$, $x \vdash \sim x \supset y$; $x \vdash y \vee \sim y$ недоказуемы в S^1. Выражения вида $x \vdash (y \vdash x)$ и $x \vdash (\sim x \vdash y)$ не являются формулами следования, доказуемыми в S^1.

Согласно $MT3$ в S^1 исключаются следствия, подобные парадоксам материальной и сторогой импликации. Поэтому $MT1$ мы называем теоремой непарадоксальности, а систему S^1 непарадоксальной в смысле $MT1$.

§ 5. Главная семантическая интерпретация

Примем следующую семантическую интерпретацию, которую будем считать главной (поскольку относительно ее будет в дальнейшем определяться полнота S^1):

1) элементарным высказываниям приписываются значения 1 и 0 (соответственно «истинно» и «неистинно»);

2) если x имеет значение 1, то $\sim x$ имеет значение 0; если x имеет значение 0, то $\sim x$ имеет значение 1;

3) $(x^1 \cdot \ldots \cdot x^n)$ имеет значение 1 тогда и только тогда, когда все $x^1, \ldots, x^n$ имеют значение 1;

4) $(x^1 : \ldots : x^n)$ имеет значение 1 тогда и только тогда, когда одно и только одно из $x^1, \ldots, x^n$ имеет значение 1;

5) $x \vdash y$ имеет значение 0 тогда и только тогда, когда x имеет значение 1, а y — значение 0.

$D1$. Формула следования есть тавтология, если и только если она принимает значение 1 при любых значениях входящих в нее элементарных высказываний.

$D2$. Высказывание есть тавтология, если и только если оно принимает значение 1 при любых комбинациях значений входящих в него элементарных высказываний.

$D3$. Высказывание есть противоречие, если и только если его отрицание есть тавтология.

$MT1$. Если $x \vdash y$ — теорема S^1, то она является тавтологией.

Доказательство $MT1$. 1 случай: $x \vdash y$ является аксиомой S^1. Легко проверить, что $x \vdash y$ является тавтологией. Для аксиом, охватываемых схемами $A1$ — $A8$, $A13$ и $A14$ это тривиально просто сделать. Ограничимся лишь рассмотрением аксиом, указанных в схемах $A9$ — $A12$.

Пусть в $A9$ высказывание y^1: ... :y^m принимает значение 0. Это возможно лишь при условии, если все y^1, .., y^m принимают значение 0: если одно из них имеет значение 1, то все остальные имеют значение 0, и все высказывание имеет значение 1. А это означает, что одно и только одно из x^1, ..., x^n имеет значение 1. Отсюда следует, что x^1: ... ...: x^n имеет значение 1, а $\sim (x^1:...:x^n)$ имеет значение 0. Таким образом, формулы следования, указанные в $A9$, не могут принять значение 0.

Пусть в $A10$ высказывание y^1: ... :y^m принимает значение 1. Это значит, что одно из y^1, ..., y^m принимает значение 1 (пусть это y^i), а остальные принимают значение 0. Если y^i есть конъюнкция всех x^1, ..., x^n без отрицаний, то x^1:...:x^n имеет значение 0, а $\sim (x^1: ..:x^n)$ — значение 1. Если в y^i два или более из x^1, ..., x^n имеют впереди отрицание, то возможны два случая. Первый случай — отрицание стоит перед всеми x^1, ..., x^n, и тогда все x^1, ..., x^n принимают значение 0, x^1: ... : x^n принимает значение 0, $\sim (x^1$: ... :. $x^n)$ принимает значение 1. Второй случай — по крайней мере перед двумя x^1, ..., x^n отрицание отсутствует. Тогда эти два из x^1, ..., x^n принимают значение 1, x^1: ...:x^n принимает значение 0, $\sim (x^1: ... : x^n)$ принимает значение 1.

Если в $A11$ высказывание x^1: ... : x^n принимает значение 1, то одно и только одно из x^1, ..., x^n принимает значение 1. И как бы мы ни расставили скобки, в полученной дизъюнкции так или иначе только один член будет иметь значение 1. Следовательно, y примет значение 1, и все аксиомы, соответствующие $A11$, суть тавтологии.

Если в $A12$ высказывание y имеет значение 1, то это означает, что одно и только одно из x^1, ..., x^n имеет значение 1: все высказывания вида $\sim z_1^i z_1^i z^i$ имеют значение 0, а все $(\alpha^{i1} z^1 \cdot ... \cdot \alpha^{im} z^m)$ попарно различны за счет распределения отрицаний у z^1, ..., z^m, так что если одно из них имеет значение 1, то все остальные имеют значение 0. Следовательно, x^1: ...: x^n принимает значение 1, и аксиомы, соответствующие $A12$, суть тавтологии.

2 случай: $x \vdash y$ получена путем применения правила $R1$ из $x \vdash z$ и $z \vdash y$. Утверждение $x \vdash y$ принимает значение 0 только в том случае, когда x имеет значение 1, а y — значение 0. Если формулы $x \vdash z$ и $z \vdash y$ являются тавтологиями, то во всех случаях, когда x имеет значение 1, z и y принимают значение 1. Тогда формула $x \vdash y$ также является тавтологией.

3 случай: $x \vdash y$ имеет вид $x \vdash zv$ и получена из $x \vdash z$ и $x \vdash v$ путем применения правила $R2$. Если формулы $x \vdash z$ и $x \vdash v$ являются тавтологиями, то z и v принимают значение 1 во всех случаях, когда x имеет значение 1. Тогда формула $x \vdash zv$ также является тавтологией.

4 случай: y в $x \vdash y$ получено из x путем замены вхождения (по крайней мере одного) высказывания z в x высказыванием v. Если $z \vdash v$ и $v \vdash z$ являются тавтологиями, то z и v принимают одинаковые значения истинности при одной и той же комбинации значений истинности входящих в них элементарных высказываний. Тогда y будет принимать те же значения истинности, что и x, при одной и той же комбинации значений истинности входящих в них элементарных высказываний, так что и $x \vdash y$ будет являться тавтологией.

Из $MT1$ вытекают следствия:

$MT2$. Если $x \vdash y$ есть теорема S^1 и x имеет значение 1, то y имеет значение 1.

$MT3$. Если $x \vdash y$ есть теорема S^1 и y имеет значение 0, то x имеет значение 0.

$MT4$. Если $x \vdash y$ и $y \vdash x$ суть теоремы S^1, то x и y равнозначны (т. е. принимают одно и то же значение при одной и той же комбинации значений входящих в них элементарных высказываний).

$MT5$. Если $x \vdash y$ есть теорема S^1, то $x \supset y$ есть тавтология.

§ 6. Непротиворечивость S^1

Система S^1 непротиворечива в смысле следующих метатеорем:

*MT*1. Если $x \vdash y$ есть теорема S^1 и при этом x не есть противоречие, то $x \vdash \sim y$ не есть теорема S^1 (недоказуема в S^1).

*MT*2. Если $x \vdash \sim yy$ есть теорема S^1, то x есть противоречие.

Доказательство *MT*1. Так как $x \vdash y$ есть теорема S^1, то на основании *MT*1 предшествующего параграфа она есть тавтология. При этом, поскольку $\sim x$ не является тавтологией, высказывание x принимает значение 1 по крайней мере при одной комбинации значений входящих в него элементарных высказываний. Из интерпретации знака $\vdash$ следует, что высказывание y при той же комбинации значений элементарных высказываний также принимает значение 1. Тогда высказывание $\sim y$ при этой комбинации значений элементарных высказываний имеет значение 0. Поэтому при данной комбинации значений входящих в x элементарных высказываний формула следования $x \vdash \sim y$ принимает значение 0. Следовательно, она не является тавтологией. Поэтому, в силу *MT*1 предшествующего параграфа она не есть теорема S^1.

Справедливость *MT*2 видна из следующего: $\sim yy$ есть противоречие, т. е. всегда имеет значение 0; согласно *MT*3 предшествующего параграфа x всегда имеет значение 0, т. е. есть противоречие.

§ 7. Полнота S^1

*D*1. Формула следования $x \vdash y$ есть сильная тавтология, если и только если $x \vdash y$ есть тавтология в смысле *D*1 пятого параграфа и при этом в y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x.

*D*2. Каноническая форма высказывания:

1) x: $\sim x$ находится в канонической форме;

2) x^1:...:$x^n (n \geqslant 1)$ находится в канонической форме, если выполнены следующие условия: a) $x^1, \ldots, x^n$ суть высказывания вида $(\alpha^{i1} a^{i1} \cdot \ldots \cdot \alpha^{im} a^{im})$ $(m \geqslant 1)$, где $\alpha^{i1}, \ldots, \alpha^{im}$ означают наличие или отсутствие отрицания; b) все $\alpha^{ik} a^{ik}$ попарно различны и упорядочены так, что если в $\alpha^{ir} a^{ir}$ и $\alpha^{is} a^{is}$ элементарное высказывание a^{ir} предшествует в алфавитном порядке элементарному высказыванию a^{is}, то $r < s$; если же в α^{ir} a^{ir} и α^{is} a^{is} элементарные высказывания a^{ir} и a^{is} совпадают, α^{ir} означает отсутствие, а α^{is} — наличие отрицания, то $r < s$; c) все x^i попарно различны;

3) высказывание находится в канонической форме только в силу пунктов 1 и 2.

*D*3. Высказывание y есть каноническая форма для высказывания x, если и только если y находится в канонической форме, и $x \vdash y$ и $y \vdash x$ суть теоремы S^1.

*D*4. Формула следования $x \vdash y$ находится в канонической форме, если и только если x и y находятся в канонической форме, множества элементарных высказываний, входящих в x и y, совпадают, и в y входят все те высказывания вида $\sim zz$, которые входят в x.

*D*5. Формула следования $x^* \vdash y^{**}$ есть каноническая форма для $x \vdash y$, если и только если x^* есть каноническая форма для x, имеющая вид $x^1 : \ldots : x^n$ $(n \geqslant 1)$, а y^{**} есть каноническая форма для $y^* z$ $(v : \sim v)$, где y^* есть каноническая форма для y, z есть высказывание вида $z^1 z^2 \ldots z^m$ $m \geqslant 0)$ (где z^i есть высказывание вида $\sim aa$, входящее в x^*, но не входящее в y^*), а v есть конъюнкция элементарных высказываний, которые не входят в y^*, но входят в x^*, за исключением таких, которые входят в x^i вместе с их отрицанием.

*T*1. $x \sim x : xy \vdash xy$

1. $x \sim x : xy \vdash y$	[*A*13, *T*23 I2, *R*1]
2. $x \sim x : xy \vdash x$	[*A*13, *T*1 I2, *R*1]
3. $x \sim x : xy \vdash xy$	[1, 2, *R*2]

T[illegible]. $xy \vdash x \sim x : xy$

1. $xy \vdash xy\,(x : \sim x)$ [$T18$ I2, $T19$ I2, $R3$]
2. $xy \vdash x \sim x : xy$ [1, $T10$ I2, $A13$, $A3$, $R1$]

T[illegible]. $x \sim xz : y \vdash y$

1. $x \sim xz : y \vdash (x \sim xz : y)\,(x : \sim x)\,(z : \sim z)$ [$T20$ I2, $R2$]
2. $x \sim xz : y \vdash (y : x \sim xz)\,(xz : x \sim z : \sim xz : \sim x \cdot \sim z)$ [1, $A13$, $T10$ I2, $R3$, $R1$]
3. $x \sim xz : y \vdash (xzy : x \sim xz) : x \sim zy : : \sim xzy : \sim x \sim zy$ [2, $A14$, $A11$ $R1$]
4. $x \sim xz : y \vdash xzy : x \sim zy : \sim xzy : \sim x \sim zy$ [3, $A13$, $T10$ I2, $R3$, $T1$, $T2$, $R1$]
5. $x \sim xz : y \vdash y$ [4, $A13$, $T1$ I2, $R1$]

$MT1$. Для любого высказывания x может быть найдена его каноническая форма y.

Доказательство $MT1$. 1 случай: x совпадает с y. По $T2$I2 получаем $x \vdash y$ и $y \vdash x$. 2 случай: в x не входит знак дизъюнкции, а знак отрицания находится только перед элементарными высказываниями. По $T3$I2 и $T4$I2 получаем $x \vdash y$ и $y \vdash x$. 3 случай: x имеет вид $x^1: \ldots : x^n$. Если не имеет место 1 случай, по $T17$I2, $A7$, $A8$, $A13$, $T10$I2, $T13$I2, $T14$I2 получаем $x \vdash y$ и $y \vdash x$. 4 случай: x имеет вид $\sim (x^1 : \ldots$ $\ldots : x^n)$. На основании $A9$, $A10$, $A7$, $A8$, $A13$, $T10$I2, $T13$I2, $T14$I2 получаем $x \vdash y$ и $y \vdash x$. 5 случай: x имеет вид yz. Если не имеют места 1 и 2 случаи, по $A7$—$A10$, $A13$, $T10$I2, $T13$I2, $T14$I2 получаем $x \vdash v$ и $v \vdash x$, где v есть высказывание вида $x^1 : \ldots : x^n$. По 3 случаю имеем $v \vdash y$ и $y \vdash v$. Отсюда на основании правила $R1$ получаем $x \vdash y$ и $y \vdash x$. 6 случай: x имеет вид $\sim (zv)$. По $A7$, $A8$ и далее как в 3 случае получаем $x \vdash y$ и $y \vdash x$.

$MT2$. Если $x \vdash y$ есть сильная тавтология, то для нее может быть найдена каноническая форма $x^* \vdash y^{**}$. Последняя также есть сильная тавтология.

Доказательство $MT2$. В силу $MT1$ для любой $x \vdash y$ может быть найдена формула $x^* \vdash y^*$, где x^* и y^* суть соответственно канонические формы для x и y. Из $D3$, $MT2I4$ и $MT4I5$ следует, что x и x^*, y и y^* соответственно равнозначны, и множества элементарных высказываний, входящих в них, совпадают. Поэтому если $x \vdash y$ есть сильная тавтология, то и $x^* \vdash y^*$ есть сильная тавтология. Так как в y^* входят только те элементарные высказывания, которые входят в x^*, то может быть найдено такое y^*z $(v: \sim v)$, удовлетворяющее условиям $D5$, что множество элементарных высказываний, входящих в него, совпадет с множеством элементарных высказываний, входящих в x. На основании $MT1$ для y^*z $(v : \sim v)$ может быть найдена каноническая форма y^{**}. Если $\sim x$ не есть тавтология, то y^{**} есть каноническая форма для y^* $(v : \sim v)$. Очевидно, что в этом случае y^{**} равнозначно y^*. Следовательно, $x^* \vdash y^{**}$ в данном случае является сильной тавтологией. Если $\sim x$ — тавтология, то x^* в $x^* \vdash y^{**}$ принимает значение 0 при любых комбинациях значений входящих в него элементарных высказываний. Поэтому и в этом случае $x^* \vdash y^{**}$ является сильной тавтологией.

$MT3$. $x \vdash y$ есть теорема S^1, если и только если ее каноническая форма $x^* \vdash y^{**}$ есть теорема S^1.

Доказательство $MT3$. Пусть $x \vdash y$ есть теорема S^1. Покажем, что в этом случае $x^* \vdash y^{**}$ есть также теорема S^1. Формула $x^* \vdash y^*$, где x^* и y^* суть канонические формы для x и y, является теоремой S^1, так как она может быть получена по правилу $R1$ из $x \vdash y$ на основании $D2$ и $MT1$. Если множества элементарных высказываний, входящих в x и y, совпадают, и в x^* нет вхождений вида $\sim aa$, которых не было бы в y^*, то $x^* \vdash y^{**}$ совпадает с $x^* \vdash y^*$. Если в x^* входят высказывания $z^1, \ldots, z^m$, которые не входят в y^*, то на основании $A13$, $T1I2$, $R1$, $R2$ получаем $x^* \vdash$ $\vdash y^*z$, где z есть высказывание вида $z^1 \cdot \ldots \cdot z^m$. Если в x^* входят элементарные высказывания $v^1, \ldots, v^k$, которые не входят в y^*, то по $T20I2$, используя $A11$ и $A12$ и применяя

$R1$ и $R2$ получаем $x^* \vdash y^* \ (v : \sim v)$, где v есть $v^1 \cdot \ldots \cdot v^k$. Таким образом, мы показали, как от $x \vdash y$ перейти к $x^* \vdash$ $\vdash y^*z \ (v : \sim v)$. По $T1012$ и $R1$ отсюда следует $x^* \vdash y^{**}$.

Пусть $x^* \vdash y^{**}$ есть теорема S^1. Покажем, что тогда $x \vdash y$ также является теоремой S^1. Действительно, на основании $A13$, $T1012$, $A3$, $T112$, $R2$ и $R3$ от $x^* \vdash y^{**}$ можно перейти к $x^* \vdash y^*$ и далее в силу $D2$ и $MT1$ получить $x \vdash y$.

*MT*4. Пусть формула $x \vdash y$ есть сильная тавтология, в канонической форме, имеющей вид $x^1 : \ldots : x^i \vdash y^1 : \ldots : y^k$. Если $\sim x$ не является тавтологией, то $x^1, \ldots, x^i$ имеют такое вхождение в y, что совпадает с некоторыми (необязательно со всеми) из $y^1, \ldots, y^k$, так что $k \geqslant i$.

Доказательство *MT*4. Так как $\sim x$ не есть тавтология, то из $D2$ следует, что при любой комбинации значений входящих в x элементарных высказываний либо все x^j принимают значение 0, либо одно и только одно из x^j принимает значение 1, а остальные принимают значение 0. При этом каждое из x^j принимает значение 1 при одной и только одной комбинации значений входящих в x элементарных высказываний. То же самое справедливо и для $y^1, \ldots, y^k$. Из $D1$ и $D3$ следует, что множества элементарных высказываний, входящих в x^j и y^j, совпадают. На основании $D1$ отсюда вытекает, что $x^1, \ldots, x^i$ должны совпадать с высказываниями из $y^1, \ldots, y^k$. Действительно, если x^j не совпадает ни с одним из $y^1, \ldots, y^k$, то при некоторой комбинации значений входящих в x элементарных высказываний x^j принимает значение 1, а y — значение 0. Поэтому если $x \vdash y$ есть тавтология, то $x^1, \ldots, x^i$ входят в y, так что $k \geqslant 1$.

*MT*5. Если $x \vdash y$ есть сильная тавтология, находящаяся в канонической форме, то она есть теорема S^1.

Доказательство *MT*5. Пусть в $x \vdash y$ не входит высказывание вида $\sim aa$. Тогда $x \vdash y$ имеет вид $x^1 : \ldots : x^i \vdash y^1 : \ldots$ $\ldots : y^k$ $(1 \leqslant i \leqslant 2^r$, где r есть число элементарных высказываний, входящих в $x \vdash y)$. В силу *MT*4 и на основании закона коммутации для дизъюнкции $T812$ достаточно показать, что формула $x^1: \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots x^k$ $(i \leqslant k \leqslant 2^r)$ есть теорема S^1. В зависимости от k доказательство подразделяется на четыре случая. 1 случай: $i = k$. Тогда $x \vdash y$ имеет вид $x^1: \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots : x^i$ и доказуема согласно $T2I2$. 2 случай: $k = 2^r$. По $T20I2$, используя $A11$ и $A12$, имеем

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash (x^1 : \ldots : x^i)\,(x^1 : \sim x^1).$$

Отсюда по $T1I2$ и $R1$ получаем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \sim x^1$$

Согласно $A7$ и $A8$ отрицание конъюнкции, содержащей r различных элементарных высказываний, дает каноническую форму, состоящую из $2^r - 1$ члена. Следовательно, на основании правила $R3$ и $A12$ получаем:

$$x^1 : \sim x^1 \vdash x^1 : \ldots : x^k \; (k = 2^r).$$

Отсюда по правилу $R1$ имеем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots : x^k \; (k = 2^r).$$

3 случай: $k = 2^r - 1$. Согласно 2 случаю имеем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots : x^k \; (k = 2^r).$$

Используя $T8I2$, $A11$, $A7$, $A8$ и $R3$ получаем:

$$x^1 : \ldots : x^k \vdash x^l : \sim x^l \; (i \leqslant l \leqslant 2^r).$$

По правилу $R1$ отсюда следует:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^l : \sim x^l.$$

Применяя правило $R1$ к полученной формуле и к формуле, доказанной в 1 случае, имеем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash (x^l : \sim x^l)\,(x^1 : \ldots : x^i).$$

На основании $A14$ получаем:

$$(x^l : \sim x^l)\,(x^1 : \ldots : x^i) \vdash x^l x^1 : \ldots : x^l x^i : \sim x^l$$

Отсюда по правилу $R1$ следует:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^l x^1 : \ldots : x^l x^i : \sim x^l.$$

Так как x^l не входит в $x^1 : \ldots : x^i$, а все члены канонической формы различны, то в $x^l x^j$ $(1 \leqslant j \leqslant i)$ есть элементарное высказывание вместе с его отрицанием. Используя $A11$ и применяя i раз $T3I5$, получаем:

$$x^l x^1 : \ldots : x^l x^i : \sim x^l \vdash \sim x^l.$$

По правилу $R1$ имеем;

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash \sim x^l.$$

По $A7$ следует:

$$\sim x^l \vdash x^1 : \ldots : x^i : \ldots : x^{l-1} : x^{l+1} : \ldots : x^k \quad (k = 2^r - 1).$$

Следовательно, по правилу $R1$,

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots : x^k \quad (k = 2^r - 1)$$

4 случай: $i < n < 2^r - 1$. Пусть $l = i + 1$.
Согласно 3 случаю,

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots : x^i : x^{i+2} : \ldots : x^k.$$

Пусть $l = i + 2$. Тогда по 3 случаю,

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash \sim x^{i+2}$$

По правилу $R2$, используя одновременно $T8I2$, получаем;

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash (x^{i+2} : x^1 : \ldots : x^i : x^{i+3} : \ldots : x^k) \sim x^{i+2}$$

На основании $A14$ имеем:

$$(x^{i+2} : x^1 : \ldots : x^k) \sim x^{i+2} \vdash x^{i+2} \sim x^{i+2} : x^1 : \ldots : x^k$$

По $T3I5$, используя $A11$, получаем:

$$x^{i+2} \sim x^{i+2} : x^1 : \ldots : x^k \vdash x^1 : \ldots : x^k \quad (k = 2^r - 2)$$

Применяя правило $R1$ к трем последним формулам, имеем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots : x^k \quad (k = 2^r - 2).$$

Действуя аналогичным образом, можно исключить любой $x^l (i < l \leqslant 2^r)$ член дизъюнкции

Пусть в $x \vdash y$ входит высказывание вида $\sim aa$. Тогда $x \vdash y$ имеет вид

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash y^1 : \ldots : y^k \quad (1 \leqslant i \leqslant 2^s, 1 \leqslant k \leqslant 2^s),$$

где s есть число элементарных высказываний $z^1, \ldots, z^s$, входящих в $x \vdash y$, за исключением a. По $T2012$, $T112$, $A11$, $A12$ и $R1$ имеем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash z : \sim z,$$

где z есть конъюнкция $z^1, \ldots, z^s$. По $A13$, $T112$ и $R1$ получаем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash w,$$

где w есть конъюнкция всех высказываний вида $\sim aa$. Из полученных формул по $R2$ следует:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash w (z : \sim z).$$

Отсюда по $A7$, $A8$, $T1012$, $R3$ и $R1$ получаем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash y^1 : \ldots : y^k \qquad (k = 2^s)$$

На основании $T812$, $T317$, $A11$ и $R1$ получаем искомую формулу.

Из $MT2$ — $MT5$ следует метатеорема:

*MT*6. Если $x \vdash y$ есть сильная тавтология, то она есть теорема S^1.

Система S^1 полна в смысле $MT6$.

*MT*7. Если $x \supset y$ есть тавтология, и при этом в y не входят элементарные высказывания, не входящие в x, то $x \vdash y$ есть теорема S^1.

*MT*8. Если $x \vdash y$ доказуема в S^1 и при этом в x и y входят одинаковые элементарные высказывания, то $\sim y \vdash$ $\vdash \sim x$ доказуема в S^1.

Теорему $MT8$ можно рассматривать как производное правило вывода (правило контрапозиции). Она есть следствие $MT6$.

§ 8. Независимость S^1

Независимость ряда аксиомных схем устанавливается посредством истинностных таблиц с двумя значениями истинности 1 и 0 (отмеченное значение 1):

1) для $A1$ принимается $\sim x = 0$ и $x^1 : \ldots : x^n = x^1 \cdot \ldots \cdot x^n$.

2) для $A2$ принимается $\sim x = 1$ и $x^1 : \ldots : x^n = x^1 \vee \ldots \vee x^n$, где $\vee$ есть соединительная дизъюнкция ($x^1 \vee \ldots \vee x^n = 0$, если и только если все $x^1, \ldots, x^n$ имеют значение 0);

3) для $A3$ принимается $\sim x = x$, $xy = 1$, $x^1 : \ldots : x^n = 1$

4) для $A4$ принимается $\sim x = x$, $xy = x$, $x^1 : \ldots : x^n = x^1$

5) для $A7$ принимается $\sim x = x$, $x^1 : \ldots : x^n = 0$

6) для $A9$ принимается $\sim x = x$, $x^1 : \ldots : x^n = x^1 \vee \ldots \vee x^n$

7) для $A10$ принимается $x^1 : \ldots : x^n = x^1 \vee \ldots \vee x^n$

8) для $A11$ принимается $x = \sim x$, $x^1 : x^2 = 0$, $x^1 : \ldots : x^n = 1$, если все $x^i = 1$, и $x^1 : \ldots : x^n = 0$ в остальных случаях ($n > 2$); рассматривается частный случай

$$a^1 : a^2 : \ldots : a^n \vdash (a^1 : a^2 : \ldots : a^{n-1}) : a$$

Для доказательства независимости $A5$ и $A6$ можно воспользоваться трехзначными таблицами с 0 в качестве единственного отмеченного значения. Следующие таблицы являются общими для $A5$ и $A6$: 1) $\sim x = 1$, если $x = 1$; $\sim x = 2$, если $x = 0$; $\sim x = 0$, если $x = 2$; 2) $xy = 0$, если и только если $x = 0$ и $y = 0$; в остальных случаях $xy = 1$; 3) $x^1 : \ldots : x^n = 1$ $(n \geqslant 2)$; 4) $(x \vdash y) = 2$, если $x = 0$ и $y = 1$ или $y = 2$; $(x \vdash y) = 0$ в остальных случаях. Затем:

9) для $A5$ принимается $x^1 \cdot \ldots \cdot x^n = 0$ $(n > 2)$

10) для $A6$ принимается $x^1 \cdot \ldots \cdot x^n = 1$ $(n > 2)$.

Независимость $A8$ и $A13$ устанавливается посредством трехзначных таблиц с отмеченными значениями 0 и 1.

Общие для них таблицы : 1) $\sim x = 1$, если $x = 1$; $\sim x = 2$, если $x = 0$; $\sim x = 0$, если $x = 2$; 2) $(x \vdash y) = 2$, если $x = 0$ или $x = 1$, а $y = 2$; $(x \vdash y) = 0$ в остальных случаях. Затем:

11) для $A8$ принимается $xy = 2$, если и только если $y = 2$ (или то и другое); $xy = 0$ в остальных случаях; $x^1 : \ldots : x^n = 0$ $(n \geqslant 2)$, если одно и только одно x^i равно 0, а все остальные x^i равны 2; $x^1 : \ldots : x^n = 2$, если все x^i равны 2; $x^1 : \ldots : x^n = 1$ в остальных случаях;

12) для $A13$ принимается $xy = 2$, если и только если $x = 2$ или $y = 2$ (или то и другое); в остальных случаях $xy = 1$; $x^1 : \ldots : x^n = 1$.

Независимость $A12$ и $A14$ доказывается посредством четырехзначных таблиц с единственным отмеченным значением 0. Для $A12$ берется частный случай $y^1 : (y^2 : \ldots : y^m) \vdash \vdash y^1 : y^2 \ldots : y^m$, и независимость его доказывается при условии, что $A11$ имеет вид $x^1 : \ldots : x^n \vdash x$, где x отличается от $x^1 : \ldots : x^n$ расстановкой скобок, за исключением случая, когда в скобки берется и x^n. Такой формулировки $A11$ достаточно для доказательства $T8I2$, с помощью которой легко получить исключенный случай.

Общие для $A12$ и $A14$ таблицы: 1) $\sim x = x$, если $x = 1$ или $x = 2$; $\sim x = 3$; если $x = 0$; $\sim x = 0$, если $x = 3$; 2) $xy = 0$, если и только если $x = 0$ и $y = 0$; в остальных случаях $xy = 1$; 3) $(x \vdash y) = 2$, если и только если $x = 0$, а $y = 1$, $y = 2$ или $y = 3$; $(x \vdash y) = 0$ в остальных случаях. Затем:

13) для $A12$ принимается $x^1 : \ldots : x^n = 0$, если $x^n = 2$; $x^1 : \ldots : x^n = 2$ в остальных случаях;

14) для $A14$ принимается $x^1 : \ldots x^n = 1$, если хотя бы одна x^i равна 1; $x^1 : \ldots : x^n = 0$ в остальных случаях;

Для доказательства независимости правил $R1$ и $R2$ достаточно двухзначных таблиц. Таблицы для $R1$: $\sim x = 0$; $xy = 0$; $x^1 : \ldots : x^n = 0$; $(x \vdash y) = 0$, если и только если $x = 1$ и $y = 1$. При этом $a \vdash a$ не будет тавтологией. Таблицы для $R2$: $\sim x = x$; $xy = 0$; $x^1 : \ldots : x^n = 0$;

$(x \vdash y) = 0$, если и только если $x = 1$ и $y = 0$. При этом $a \vdash aa$ не является тавтологией.

Для доказательства независимости $R3$ воспользуемся трехзначными таблицами с отмеченным значением 0: 1) $\sim x = 1$, если $x = 1$; $\sim x = 2$, если $x = 0$; $\sim x = 0$, если $x = 2$; 2) $xy = 0$, если и только если $x = 0$ и $y = 0$; $xy = 1$ в остальных случаях; 3) $x^1 : \ldots : x^n = 1$; 4) $(x \vdash y) = 2$, если и только если $x = 0$, а $y = 1$ или $y = 2$; $(x \vdash y) = 0$ в остальных случаях. При этом $a \vdash a : \sim aa$ не является тавтологией.

§ 9. Правило подстановки

*MT*1. Если $x \vdash y$ доказуема в S^1, то $z \vdash v$, получающаяся из $x \vdash y$ путем подстановки высказывания a на место элементарного высказывания b везде, где b входит в $x \vdash y$, доказуема в S^1.

Теорему *MT*1 можно использовать как производное правило вывода (правило подстановки в элементарное высказывание, аналогичное правилу подстановки в пропозициональную переменную).

ГЛАВА ВТОРАЯ

СИЛЬНОЕ СЛЕДОВАНИЕ (ДРУГОЙ ВАРИАНТ)

§ 1. Система S_1

Система S_1 отличается от S^1 лишь тем, что вместо сильной дизъюнкции используется ослабленная (или соединительная) дизъюнкция ($\vee$), и списком аксиомных схем.

Дизъюнкция $\vee$ читается как «По крайней мере одно из». Семантически она интерпретируется так: $x^1 \vee \ldots \vee x^n$ ($n \geqslant 2$) имеет значение 0, если все $x^1, \ldots, x^n$ имеют значение 0, и значение 1 во всех остальных случаях:

Аксиомные схемы S_1:

$A1.\ \sim\sim x \vdash x$
$A2.\ x \vdash \sim\sim x$
$A3.\ xy \vdash x$
$A4.\ xy \vdash yx$
$A5.\ x^1x^2 \ldots x^n \vdash y,$

где y отличается от $(x^1x^2 \ldots x^n)$ только какой-то (любой) расстановкой скобок, удовлетворяющей определению $D2I1$

$A6.\ y \vdash x^1x^2 \ldots x^n,$

где y то же, что и в $A5$

$A7.\ (x \vee y)\, z \vdash xz \vee y$
$A8.\ xz \vee yz \vdash (x \vee y)\, z$
$A9.\ \sim (xy) \vdash \sim x \vee \sim y$
$\quad \sim (x^1x^2 \ldots x^n) \vdash \sim x^1 \vee \sim x^2 \vee \ldots \vee \sim x^n$
$A10.\ \sim x \vee \sim y \vdash \sim (xy)$
$\quad \sim x^1 \vee \sim x^2 \vee \ldots \vee \sim x^n \vdash \sim (x^1x^2 \ldots x^n)$
$A11.\ xy \vee z \vdash (xy \vee z)(y \vee \sim y).$

Для S_1 имеют силу метатеоремы непротиворечивости и непарадоксальности, аналогичные метатеоремам $MT1I4$ — $MT3I4$, $MT1I6$ и $MT2I6$. Доказательства их аналогичны доказательству упомянутых метатеорем, и мы их здесь опускаем. Вместо $A11$ может быть принята «более простая» аксиомная схема

$A^*11.\ x \vee \sim yyz \vdash x$

Сильная дизъюнкция может быть введена посредством определения:

$D1$. $x : y$ есть сокращение для $x \sim y \vee \sim xy$; $x^1 : x^2 : \ldots$ $\ldots : x^n$ есть сокращение для $y^1 \vee \ldots \vee y^n$, где y^i ($i = 1, \ldots$ $\ldots, n$) есть конъюнкция x^i и отрицаний всех остальных высказываний из числа $x^1, \ldots, x^n$.

Если сильная дизъюнкция принимается как первичный оператор, вместо $D1$ принимаются дополнительные аксиомные схемы:

$A12.\ x^1 : \ldots : x^n \vdash y^1 \vee \ldots \vee y^n$,

где y^i ($i = 1, \ldots, n$) есть конъюнкция x^i и отрицаний всех остальных высказываний из числа $x^1, \ldots, x^n$.

$A13.\ y^1 \vee \ldots \vee y^n \vdash x^1 : \ldots : x^n$,

где $y^1, \ldots, y^n$ те же, что и в $A12$.

Система S_1 сформулирована в [4,5].

§ 2. Полнота

Если $x \vdash y$ и $y \vdash x$, будем для краткости писать, как и выше, $x \dashv\vdash y$.

$T1$. $x \dashv\vdash x (p \vee \sim p)$, где p входит в x.

Доказательство $T1$.

1. $x^1 \cdot \ldots \cdot x^n \dashv\vdash y$, где y отличается от $x^1 \cdot \ldots \cdot x^n$ любой расстановкой скобок, отвечающей определению высказывания или последовательностью записи $x^1, \ldots, x^n$

[$A4$— $A6$, $R1$, $R3$].

2. $x^1 \vee \ldots \vee x^n \dashv\vdash \sim(\sim x^1 \cdot \ldots \cdot \sim x^n)$

[$A9$, $A10$, $A1$, $A2$, $R3$]

3. $x^1 \vee \ldots \vee x^n \dashv\vdash y$,

где y отличается от $x^1 \vee \ldots \vee x^n$ расстановкой скобок или порядком записи $x^1, \ldots, x^n$ [1, 2, $R3$, $R1$].

4. $xx \dashv\vdash x$ [$A3$, $A1$, $A2$, $R1$, $R2$]

5. $x \vee x \dashv\vdash x$ [4, $A9$, $A10$, $R3$, $R1$, $A1$, $A2$]

6. $(x \vee y) z \dashv\vdash xz \vee yz$ [$A8$, $A7$, $A3$, $R2$]

7. $x \dashv\vdash x(p \vee \sim p)$

где p входит в x.

Теорема 7 доказывается индукцией по числу вхождений логических операторов в x. Пусть x есть p. В таком случае

$p \dashv\vdash p(p \vee \sim p)$ [$A1$, $A2$, $R1$, $A11$, 6, 7, $R2$, $A3$]

Если x есть $\sim p$, аналогично получим $\sim p \dashv\vdash \sim p\,(p \vee \sim p)$. Пусть x есть $y \vee z$. Если p входит в y, то по индуктивному предположению $y \dashv\vdash y\,(p \vee \sim p)$.

Последовательно получаем:

а) $y \vee z \dashv\vdash y(p \vee \sim p) \vee z$ [$R3$, $R1$]

б) $y \vee z \dashv\vdash yp \vee (y \sim p \vee z)$ [6, $R3$, $R1$, 3]

в) $y \vee z \dashv\vdash (yp \vee y \sim p \vee z)(p \vee \sim p)$

[$A11$, 3, $R3$, $R1$]

г) $y \vee z \dashv\vdash (y(p \vee \sim p) \vee z)(p \vee \sim p)$ [$R3$, $R1$, 6]

д) $y \vee z \dashv\vdash (y \vee z)(p \vee \sim p)$ [$A7$, 6, $R3$, $R1$]

Аналогичный результат получим, если p входит в z. Пусть далее, x есть yz. Пусть p входит в y. По индуктивному предположению

$y \dashv\vdash y(p \vee \sim p)$

В таком случае получим:

а) $yz \dashv\vdash y(p \vee \sim p) z$ [$A1$, $A2$, 1, $R3$, $R1$]

б) $yz \dashv\vdash (yz)(p \vee \sim p)$ [$A4$, $R3$, $R1$, 1]

Аналогичный результат получим, если p входит в z. Случай, когда x есть $\sim y$, сводится к рассмотренным ранее.

$T2$. $x \vee \sim ppy \dashv\vdash x$,

где p входит в x, а в y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x.

Доказательство $T2$.

1. $\sim(x(p \vee \sim p)) \dashv\vdash \sim x$ [$R3$, 7 из $T1$, $R1$, $A1$, $A2$]
2. $\sim x \vee p \sim p \dashv\vdash \sim x$ [$R3$, $R1$, $A9$, $A10$, 2 из $T1$]
3. $x \vee p \sim p \dashv\vdash x$ [$R3$, $R1$, $A1$, $A2$]
4. $xy \vee z \dashv\vdash \sim\sim(xy \vee z)$ [$A1$, $A2$]
5. $\sim(xy \vee z) \dashv\vdash (\sim x \vee \sim y) \sim z$ [$A9$, $A10$, 2 из $T1$]
6. $\sim(xy \vee z) \dashv\vdash \sim x \sim z \vee \sim y \sim z$ [$R3$, $R1$, 5, 6 из $T1$]
7. $xy \vee z \dashv\vdash \sim(\sim x \sim z \vee \sim y \sim z)$ [$R3$, $R1$, 4, 6]
8. $xy \vee z \dashv\vdash (\sim\sim x \vee \sim\sim z)(\sim\sim y \vee \sim\sim z)$ [$R3$, $R1$, 7, $A9$, $A10$]
9. $xy \vee z \dashv\vdash (x \vee z)(y \vee z)$ [8, $R3$, $R1$, $A1$, $A2$]

10. $x \vdash x \vee y$, где в y входят только те элементарные высказывания, которые входят в x [$A1$, $A2$, $R1$, $R3$].

11. $x \dashv\vdash x \vee \sim ppy$, где в $\sim ppy$ не входят элементарные высказывания, которые не встречаются в x [10, 9, $A3$, 3].

$D1$. Будем говорить, что высказывание находится в канонической форме, если и только если оно имеет вид $y^1 \vee \ldots \vee y^n$ ($n \geqslant 2$) и удовлетворяет следующим условиям: 1) каждое из y^i есть $(\alpha^1 p^1 \cdot \ldots \cdot \alpha^m p^m)$, где $p^1, \ldots, p^m$ суть все элементарные высказывания, входящие в x; $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$ означают наличие или отсутствие отрицания, и все $\alpha^1 p^1, \ldots, \alpha^m p^m$ попарно различны; 2) если p^i входит в некоторое y^i без отрицания, то среди $y^1, \ldots, y^n$ найдется такое y^k (не обязательно другое), в которое входит $\sim p^i$, и наоборот; 3) все $y^1, \ldots, y^n$ попарно различны.

$D2$. Будем говорить, что $x \vdash y$ находится в канонической форме, если и только если оба x и y находятся в канонической форме, и множества входящих в них элементарных высказываний совпадают.

MT1. Для всякой $x \vdash y$ может быть найдена $x^* \vdash y^*$ в канонической форме такая, что $x \dashv\vdash x^*$ и $y \dashv\vdash y^*$ доказуемы в S_1.

Доказательство *MT1*.

1. Для всякого x может быть найдено y, находящееся в канонической форме такое, что $x \dashv\vdash y$. Это утверждение доказывается методом математической индукции по числу логических операторов, встречающихся в x. Если x есть p, то

$$p \dashv\vdash p \vee \sim pp \qquad [3 \text{ из } T2].$$

Аналогично

$$\sim p \dashv\vdash \sim p \vee \sim pp.$$

Пусть x есть $x^1 \vee x^2$. По индуктивному предположению

$$x^1 \dashv\vdash y^1 \qquad x^2 \dashv\vdash y^2,$$

где y^1 и y^2 находятся в канонической форме. В таком случае

$$x^1 \vee x^2 \dashv\vdash y^1 \vee y^2 \qquad [R3,\ R1]$$

$$y^1 \vee y^2 \dashv\vdash (y^1 \vee y^2)(q^1 \vee \sim q^1) \qquad [7 \text{ из } T1],$$

где q^1 есть элементарное высказывание, отсутствующее в y^1 или в y^2.

$$y^1 \vee y^2 \dashv\vdash y^1(q^1 \vee \sim q^1) \vee y^2(q^1 \vee \sim q^1)$$
$$[R3,\ R1,\ 6 \text{ из } T1]$$

Пусть y^1 есть $z^1 \vee \ldots \vee z^n$, а y^2 есть $z_1 \vee \ldots \vee z_m$. Согласно 6 из $T1$ имеем

$$y^1 \vee y^2 \dashv\vdash z^1q^1 \vee \ldots \vee z^nq^1 \vee z^1 \sim q^1 \vee \ldots \vee$$
$$\vee z^n \sim q^1 \vee z_1q^1 \vee \ldots \vee z_m \sim q^1$$

Аналогично для прочих q^i, отсутствующих в y^1 или y^2, получим

$$y^1 \vee y^2 \dashv\vdash z^1q^1 \ldots q^k \vee \ldots \vee z^1q^1 \ldots q^k \vee \ldots \vee$$
$$\vee z_1 \sim q^1 \ldots \sim q^k \vee \ldots \vee z_m \sim q^1 \ldots \sim q^k.$$

Используя 4 из $T1$ и 5 из $T1$, $R3$ и $R1$, получим

$$y^1 \vee y^2 \dashv\vdash y,$$

где y находится в канонической форме, и

$$x^1 \vee x^2 \dashv\vdash y.$$

Пусть x есть x^1x^2. По индуктивному предположению

$$x^1 \dashv\vdash y^1 \qquad x^2 \dashv\vdash y^2,$$

где y^1 и y^2 находятся в канонической форме. Пусть y^1 есть $z^1 \vee \ldots \vee z^n$, а y^2 есть $z_1 \vee \ldots \vee z_m$. Имеем

$$y^1y^2 \dashv\vdash z^1z_1 \vee \ldots \vee z^1z_m \vee \ldots \vee z^nz_1 \vee \ldots \vee z^nz_m$$

[$R3$, $R1$, 6 из $T1$].

Используя 1, 4 и 5 из $T1$, получим

$$y^1y^2 \dashv\vdash y,$$

где y находится в канонической форме. Поскольку

$$x^1x^2 \dashv\vdash y^1y^2,$$

имеем

$$x^1x^2 \dashv\vdash y.$$

Случай, когда x есть $\sim x^1$, сводится к рассмотренным выше.

2. Пусть $p^1, \ldots, p^k$ суть все элементарные высказывания, входящие в x и отсутствующие в y.

$$x \vdash y\,(p^1 \vee \sim p^1) \ldots (p^k \vee \sim p^k) \qquad [7 \text{ из } T1,\ R2,\ R1].$$

Для x согласно 1 из $T3$ может быть найдено x^* в канонической форме такое, что

$$x \dashv\vdash x^*.$$

Аналогично для $y\,(p^1 \vee \sim p^1) \ldots (p^k \vee \sim p^k)$ может быть найдено y^* в канонической форме такое, что

$$y\,(p^1 \vee \sim p^1) \ldots (p^k \vee \sim p^k) \dashv\vdash y^*,$$

а по определению $x^* \vdash y^*$ есть каноническая форма для $x \vdash y$.

*МТ*2. Если $x \vdash y$ есть тавтология, то $x^* \vdash y^*$ есть тавтология, где $x^* \vdash y^*$ та же, что и в *МТ*1 (теорема очевидна).

*МТ*3. Если доказуема $x^* \vdash y^*$, то доказуема $x \vdash y$, где $x^* \vdash y^*$ та же, что и в *МТ*1 (теорема очевидна).

*МТ*4. Если $x \vdash y$ есть тавтология и находится в канонической форме, то $x \vdash y$ доказуема в S_1.

Доказательство *МТ*4. Пусть x есть $z^1 \vee \ldots \vee z^k$, а y есть $z_1 \vee \ldots \vee z_l$. Возможны два случая: 1) y есть противоречие; 2) y выполнимо (т. е. не есть противоречие). Рассмотрим первый случай. Если y есть противоречие, то и x есть противоречие. Значит, все z^i и z_j суть противоречия. Пусть $v^1, \ldots, v^m$ суть всевозможные противоречия, образованные из элементарных высказываний, входящих в x и y, такие, что $v^1 \vee \ldots \vee v^m$ находится в канонической форме. Очевидно, среди $v^1, \ldots, v^m$ имеются все z^i и z_j. В S_1 доказуема $v^1 \vee \ldots \vee v^m \vdash v^1 \vee \ldots \vee v^m$. По $T2$ получаем, что $v^1 \vee \ldots \vee v^m \vdash z_1 \vee \ldots \vee z_l$ и $z^1 \vee \ldots \vee z^k \vdash v^1 \vee \ldots \vee v^m$ доказуемы. Значит, доказуема $z^1 \vee \ldots \vee z^k \vdash z_1 \vee \ldots \vee z_l$, т. е. $x \vdash y$.

Для второго случая возможны два подслучая. Первый — y не есть тавтология. Если y выполнимо, то выполнимы $z_{i1}, \ldots, z_{ir}$ $(r \geqslant 1)$, где $z_{i1}, \ldots, z_{ir}$ суть какие-то из $z_1, \ldots, z_l$. Пусть ни одно из $z_{i1}, \ldots, z_{ir}$ не входит в x. При этом x должно быть противоречием (иначе оно может быть истинным при неистинном y). Поскольку $x \vdash x$, по $T2$ имеем $x \vdash x \vee y$ и $x \vdash y$. Пусть $z_{j1}, \ldots, z_{js}$ $(s \geqslant 1)$ суть все из $z_{i1}, \ldots z_{ir}$, входящие в x. Так как y не есть тавтология, в x не должны входить другие выполнимые z^i. Значит, все остальные z^i суть противоречия. Имеем $z_{j1} \vee \ldots \vee z_{js} \vdash z_{j1} \vee \ldots \vee z_{js}$, и по T_2 $z^1 \vee \ldots \vee z^k \vdash z_{j1} \vee \ldots \vee z_{js}$, $z_{j1} \vee \ldots \vee z_{js} \vdash z_1 \vee \ldots \vee z_l$, $z^1 \vee \ldots \vee z^k \vdash z_1 \vee \ldots \vee z_l$, т. е. $x \vdash y$.

Второй подслучай второго случая — y есть тавтология. При этом в y входят всевозможные выполнимые высказывания с соответствующими элементарными высказываниями. Если в x не входит ни одно из выполнимых z_i, то все $z^1, \ldots, z^k$ суть противоречия (этот случай уже рассмотрен). Если в x входит хотя бы одно выполнимое z_i, то и этот случай рассмотрен выше. Таким образом если $x \vdash y$ есть тавтология, то она доказуема в S_1. И в силу $MT2$ и $MT3$ будет верна метатеорема полноты:

$MT5$. Если $x \vdash y$ есть тавтология и при этом в y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x (т. е. $x \vdash y$ есть сильная тавтология), то она есть теорема S_1.

Теоремы $T1$, $T2$, и $MT1$ доказаны в работе А. М. Фединой [14].

$MT6$. Если $x \vdash y \vee z$ и $z \vdash v$ доказуемы в S_1, то $x \vdash y \vee v$ доказуема в S_1.

$MT7$. Если $x \vdash y$ и $z \vdash v$ доказуемы в S_1, то $x \vee z \vdash y \vee v$ доказуемы в S_1.

Теоремы $MT6$ и $MT7$ суть следствия $MT5$. Их можно использовать как производные правила вывода.

§ 3. Независимость S_1

Независимость S_1 доказана Е. А. Сидоренко [11]. Независимость большинства аксиомных схем S_1 доказывается посредством интерпретации с двумя истинностными значениями 1 и 0 (отмеченное значение 1). Формуле следования $x \vdash y$ приписывается значение 0 только в одном случае, когда значение x равно 1, а значение y равно 0. При этом для доказательства независимости аксиомных схем $A1$ — $A9$ принимаем:

1) для $A1$ принимаем, что $\sim x = 1$ (тот факт, что интерпретация логического оператора не указывается, означает, что имеется в виду принятая выше интерпретация);

2) для $A2$ принимаем, что $\sim x = 0$ и что формуле следования приписывается значение 1 также и в тех случаях, когда в нее входит по крайней мере один из знаков $\cdot$ или $\vee$;

3) для $A3$ принимаем, что $xy = 1$, $x \vee y = 1$, $\sim x = x$;

4) для $A4$ принимаем, что $xy = x$, $x \vee y = x$, $\sim x = x$;

5) для $A5$ принимаем, что $x^1x^2 \ldots x^n = 1$, если $n > 2$;

6) для $A6$ принимаем, что $x^1 x^2 \ldots x^n = 0$, если $n > 2$;

7) для $A7$ будем считать, что знак $\vee$ связывает сильнее, чем $\cdot$;

8) для $A8$ условимся, что формуле $x \vdash y$ приписывается значение 0 также в тех случаях, когда она имеет вид $x_1 \vee x_2 \vdash y_1y_2$, и при этом не выполняется ни одно из следующих условий: а) в $x \vdash y$ входит знак $\sim$; в) в x не входят элементарные высказывания, отсутствующие в y_1 или y_2; с) $x_1 \vdash x_2$ и $x_2 \vdash x_1$ доказуемы в S_1;

9) для $A9$ принимаем, что $x \vee y = y$.

Независимость $A10$ и $A11$ доказывается посредством истинностных таблиц с тремя значениями истинности 1, 2, и 3 (отмеченное значение 1);

10) для $A10$ принимаем, что $xy = 3$, если $x = 3$ или $y = 3$, и $xy = 1$ в остальных случаях; $x \vee y = \min(x, y)$; $\sim x = 4 - x$; формула $x \vdash y$ получает неотмеченное значение только в случаях, когда значение x равно 1, а значение y равно 3, и когда значение x равно 2, а значение y равно 1 или 3;

11) для $A11$ принимаем, что $xy = \max(x, y)$, $x \vee y = \min(x, y)$, $\sim x = 4 - x$, формула $x \vdash y$ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда значение x больше или равно значению y.

Независимость правила $R1$ доказывается в трехзначных таблицах: $xy = \max(x, y)$, $x \vee y = \min(x, y)$, $\sim x = 4 - x$, формула $x \vdash y$ имеет неотмеченное значение только в случае, когда значение x равно 1 или 2, а значение y равно 3. При этом теорема $p \vee \sim qq \vdash p(q \vee \sim q)$ имеет неотмеченное значение при $p = 3$ и $q = 2$.

Для доказательства независимости правила $R2$ достаточно воспользоваться двузначными таблицами: $xy = 1$, $x \vee y = 1$, $\sim x = 1$, формула $x \vdash y$ имеет значение 0 только в одном случае, когда значение обоих x и y равно 0. При этом теорема $p \vdash p$ имеет значение 0 при $p = 0$.

Независимость правила $R3$ доказывается с помощью следующих трехзначных таблиц: $xy = 1$, когда $x = 1$ и $y = 1$, и $xy = 3$ в остальных случаях; $x \vee y = 3$, когда $x = 3$ и $y = 3$, и $x \vee y = 1$ в остальных случаях; $\sim x = 4 - x$; $x \vdash y$ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда значение x больше или равно значению y. При этом $p \vdash pp$ принимает неотмеченное значение при $p = 2$.

§ 4. Эквивалентность S^1 и S_1

Если в S^1 —принято $D2I3$ или приняты $A17$ и $A18$, а в S_1 принято $D1I9$ или приняты $A12$ и $A13$, то в силу теорем полноты $MT6I7$ и $MT5I10$ будет иметь силу следующая теорема эквивалентности S^1 и S_1.

$MT1$. Если $x \vdash y$ доказуема в S^1 (или в S_1), то она доказуема в S_1 (соответственно в S^1), т. е. множества теорем S^1 и S_1 совпадают.

§ 5. Сильное следование

Системы S^1 и S_1 суть системы сильного логического следования. Они определяют правила сильного логического следования для высказываний с операторами конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и другими, производными от них операторами. Будем символом S^s обозначать S^1, S_1 и любую другую логическую систему, эквивалентную S^1 и S_1.

Возможны различные варианты S^s, отличные от S_1 и S^1. Приведем некоторые из них, рассмотренные Е. А. Сидоренко в работе [10].

Система S_1^*, эквивалентная S_1, получается из S_1 путем замены аксиомных схем $A8$ и $A11$ на аксиомную схему A^*11 и правило R^*4:

A^*11. $x \vee \sim xx \vdash x$

R^*4. Если $x \vdash y$, то $x \vdash y \vee z$, где в z нет элементарных высказываний, отсутствующих в x.

В S_1^* имеют силу теоремные схемы:

$T1$. $x \vdash x(y \vee \sim y)$, где y входит в x.

1. $\sim x \vee \sim yy \vdash \sim x$ [A^*11]
2. $\sim x \vdash \sim x \vee \sim yy$ [R^*4]
3. $\sim\sim x \vdash \sim(\sim x \vee \sim yy)$ [1, 2, $R1$]
4. $x \vdash x(y \vee \sim y)$ [3, $A9$, $A10$, $R1$; $R2$]

$T2$. $xy \vee z \vdash (xy \vee z)(y \vee \sim y)$ [$T1$]

$T3$. $xz \vee yz \vdash (x \vee y)z$

1. $(x \vee y)x \vdash x(y \vee \sim y)$ [$T1$, $A3$]
2. $x(y \vee \sim y) \vdash (x \vee y)x$ [$A3$, R^*4, $R3$]
3. $xy \vee x \dashv\vdash x \vee \sim yy$ [1, 2, $R1$, $A9$, $A10$]
4. $xz \vee yz \vdash xz \vee yz \vee z \vee \sim yy \vee \sim xx$ [R^*4]
5. $xz \vee yz \vdash z \vee \sim xx \vee \sim yy$ [3, 4, $R1$, $R2$]
6. $xz \vee yz \vdash z$ [5, A^*11, $R2$]
7. $xz(y \vee \sim y)(x \vee y) \vee yz(x \vee \sim x)(x \vee y) \vdash$
$\vdash x \vee y$ [6]
8. $xz(y \vee \sim y) \dashv\vdash (xz)(y \vee \sim y)(x \vee y)$
[$A3$, R^*4, $R3$]
9. $yz(x \vee \sim x) \dashv\vdash (yz)(x \vee \sim x)(x \vee y)$ [$A3$, R^*4, $R3$]
10. $xz(y \vee \sim y) \vee yz(x \vee \sim x) \vdash xz(y \vee \sim y)\cdot$
$\cdot(x \vee y) \vee yz(x \vee \sim x)(x \vee y)$ [8, 9, $R1$, $R2$]
11. $xz(y \vee \sim y) \vee yz(x \vee \sim x) \vdash x \vee y$ [7, 10, $R2$]
12. $(xz \vee yz)(x \vee \sim x)(y \vee \sim y) \vdash xz(y \vee \sim y) \vee$
$\vee yz(x \vee \sim x)$ [$A3$, $A7$, $R2$, $R3$]
13. $xz \vee yz \vdash (xz \vee yz)(x \vee \sim x)(y \vee \sim y)$ [$T1$, $R2$]
14. $xz \vee yz \vdash x \vee y$ [11, 12, 13, $R2$]
15. $xz \vee yz \vdash (x \vee y)z$ [6, 14, $R3$]

Аксиомная схема $A11$ системы S_1 есть частный случай $T1$, а $T3$ есть $A8$. Отсюда следует эквивалентность S_1 и S_1^*.

Система S_4^* удобнее, чем S_1, в таком смысле: благодаря R^*1 многие важные теоремы доказываются проще, чем в S_1. А доказательство $R4^*$ в S_1 довольно громоздко.

Независимость A^*11 доказывается той же интерпретацией, что и независимость $A11$ в S_1.

Независимость правила $R1$ доказывается в трехзначных таблицах: $xy = \max(x, y)$, $x \vee y = \min(x, y)$, $\sim x = 4 - x$, $x \vdash y$ принимает неотмеченное значение только в случае, когда значение x равно 1, а значение y равно 2 или 3. При этом теорема $p \vee q \vdash (p \vee p)(q \vee \sim q)$ принимает неотмеченное значение при $p = 1$ и $q = 2$.

Независимость правила R^*4 можно доказать, принимая интерпретацию, с помощью которой в S_1 доказывалась независимость $A8$.

Для доказательства независимости остальных аксиом и правил вывода S_1^* принимается та же интерпретация, что и в системе S_1.

Система S_1^{**}, эквивалентная S_1, получается из S_1 заменой аксиомных схем $A9$ — $A11$ и правила $R3$ на аксиомные схемы A_9^{**} — A_{11}^{**} и правило $R3^{**}$:

A^{**} 9. $\sim(x \vee y) \vdash \sim x \sim y$

$A^{**}10$. $\sim x \sim y \vdash \sim(x \vee y)$

$A^{**}11$. $x \vee \sim yy \vdash x$

$R^{**}3$. Если $x \vdash y$, то $\sim y \vdash \sim x$, где в x и y входят одни и те же элементарные высказывания.

В системе S_1^{**} правило $R3$ системы S_1 получается как производное, что отвечает традиции.

Независимость схем $A^{**}9$ и $A^{**}11$ доказывается той же интерпретацией, что и $A9$ и $A11$ в S_1.

Независимость $A^{**}10$ доказывается с помощью трехзначных таблиц: $xy = 1$, когда $x = 1$ и $y = 1$, и $xy = 3$ в остальных случаях; $x \vee y = 3$, когда $x = 3$ и $y = 3$, и $x \vee y = 1$ в остальных случаях; $\sim x$ равно 3, когда $x = 1$, и $\sim x = 1$ в остальных случаях; $x \vdash y$ принимает неотмеченное значение только в случае, когда значение x равно 1, а значение y равно 2 или 3.

Для доказательства независимости $A3$ условимся, что $x \vdash y$ получает неотмеченное значение, когда в x входят элементарные высказывания, отсутствующие в y.

Независимость $R^{**}3$ доказывается той же интерпретацией, что и $R3$ в S_1.

Независимость остальных аксиом и правил доказывается тем же способом, что и в S_1.

Система S^{*1}, эквивалентная S^1, получается из S^1 путем замены $R3$ на R^*3:

R^*3. Если $x \vdash y : z$ и $z \vdash v$, то $x \vdash y : v$; если $x \vdash y^1 : \ldots$ $\ldots : y^n : z$ и $z \vdash v$, то $x \vdash y^1 : \ldots : y^n : v$.

Система S_1^0, эквивалентная S_1, получается из S_1 путем аналогичной замены $R3$ (с той разницей, что вместо знака : фигурирует знак $\vee$).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ОСЛАБЛЕННОЕ СЛЕДОВАНИЕ

§ 1. Система S^2

Система S^2 получается из S^1 благодаря присоединению к аксиомным схемам S^1 аксиомной схемы $A15$ и ограничению правила $R1$:

$A15$. $\sim x \vdash \sim (xy)$

$R1$. Если $x \vdash y$ и $y \vdash x$ и при этом в x, y и z входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание, то $x \vdash z$.

Поскольку в S^2 доказуемы формулы $x \vdash y$ такие, что в y входят элементарные высказывания, отсутствующие в x, то система S^2 может быть названа теорией ослабленного следования. Система S^2 сформулирована в [4, 5]. Ограничение на $R1$ предложено Г. А. Смирновым. Им же доказана в [13] непарадоксальность и полнота S^2.

Непротиворечивость S^2 следует из того обстоятельства, что все аксиомы вида $\sim x \vdash \sim (xy)$ суть тавтологии. Независимость $A15$ следует из того, что она есть единственная аксиомная схема, в которой в формулах $x \vdash y$ в заключении y допускаются элементарные высказывания, отсутствующие в посылке x.

§ 2. Непарадоксальность S^2

Система S^2 непарадоксальна в смысле следующей метатеоремы:

$MT1$. Если $x \vdash y$ доказуема в S^2, то в x и y входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание, Доказательство $MT1$. 1 случай: $x \vdash y$ есть аксиома системы S^2. Путем проверки можно установить, что в x и y входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание. 2 случай: $x \vdash y$ получена из $x \vdash z$ и $z \vdash y$ путем применения правила $R1$. Так как правило $R1$ применимо только в том случае, если в x, y и z входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание, то в $x \vdash y$ и в x и y входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание. 3 случай: $x \vdash y$ имеет вид $x \vdash vz$ и получена по $R2$ из $x \vdash v$ и $x \vdash z$. Если в последних в x и v, а также в x и z соответственно есть по крайней мере одно одинаковое вхождение элементарного высказывания, то и в $x \vdash y$ в x и в y входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание. 4 случай: y в $x \vdash y$ получено из x путем замены вхождения (по крайней мере одного) z в x на v, причем $z \vdash v$ и $v \vdash z$. Если в z и v есть по крайней мере одно одинаковое вхождение элементарного высказывания, то и в $x \vdash y$ в x и y входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание.

Из $MT1$ следует, что формулы вида $\sim xx \vdash y, x \vdash y : : \sim y$, $x \vdash y \vee \sim y$, $x \vdash \sim (\sim yy)$ недоказуемы в S^2. Аналогично выражения вида $x \vdash (y \vdash x)$ и $x \vdash (\sim x \vdash y)$ не являются формулами следования, доказуемыми в S^2. Таким образом, и в S^2 исключаются «парадоксы», подобные «парадоксам» материальной и строгой импликации.

§ 3. Полнота S^2

$T1.\ x \vdash x(y : \sim y)$ [$A15$, $R2$]

$T2.\ x(y : \sim y) \vdash x$ [$A2$]

$D1.\ x^{**} \vdash y^{**}$ есть каноническая форма для $x \vdash y$, если и только если: 1) x^{**} есть каноническая форма для $x^{*}\ (z : \sim z)$, где x^{*} есть каноническая форма x, а z есть конъюнкция элементарных высказываний $z^1, \ldots, z^l$ $(l \geqslant 0)$, которые входят в y, но не входят в x; 2) y^{**} есть каноническая форма для y^*v (w : $\sim w$), где y^* есть каноническая форма y, v есть $v^1 \cdot \ldots \cdot v^m$ ($m \geqslant 0$) (где v^i есть $\sim a^i a^i$, которое входит в x^*, но не входит в y^*), а w есть конъюнкция $w^1, \ldots, w^r$ ($r \geqslant 0$), которые входят в x, но не входят в y, за исключением элементарных высказываний, входящих в x^* вместе с их отрицанием.

*MT*1. Если $x \vdash y$ — тавтология, и при этом в x и y есть по крайней мере одно одинаковое вхождение элементарного высказывания, то для нее может быть найдена каноническая форма $x^{**} \vdash y^{**}$. При этом $x^{**} \vdash y^{**}$ есть тавтология, причем множества элементарных высказываний, входящих в x^{**} и y^{**}, совпадают.

Доказательство *MT*1. В силу *MT*1І7, для любой $x \vdash y$ может быть найдена $x^* \vdash y^*$, где x^* и y^* суть канонические формы для x и y соответственно. По *D*3І7, *MT*2І4, *MT*4І5 следует, что x и x^*, y и y^* соответственно равнозначны, и множества элементарных высказываний, входящих в них, совпадают. Поэтому если $x \vdash y$ есть тавтология, и в x и y есть по крайней мере одно одинаковое вхождение элементарного высказывания, то и $x^* \vdash y^*$ есть тавтология, причем в x^* и y^* входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание. При этом может быть найдено такое x^* (z : $\sim z$), удовлетворяющее условиям *D*1, что множество элементарных высказываний, входящих в него, совпадает с множеством элементарных высказываний, входящих в y. С другой стороны, всегда найдется y^* v (w : : $\sim w$), удовлетворяющее условиям *D*1, такое, что множество элементарных высказываний, входящих в него, совпадает с множеством элементарных высказываний, входящих в x. Приведение этих высказываний к канонической форме не изменит их значений и множеств, входящих в них элементарных высказываний. Следовательно, может быть найдена $x^{**} \vdash y^{**}$ с одинаковыми вхождениями элементарных высказываний в x^{**} и y^{**}. Если $\sim x$ не есть тавтология, то x^{**} и y^{**} соответственно равнозначны x^* и y^*, так что $x^{**} \vdash y^{**}$ также есть тавтология. Если $\sim x$ является тавтологией, то x^{**} всегда принимает значение 0; следовательно, $x^{**} \vdash y^{**}$ и в данном случае является тавтологией.

*MT*2. $x \vdash y$ доказуема в S^2, если и только если ее каноническая форма $x^{**} \vdash y^{**}$ доказуема в S^2.

Доказательство *MT*2. Пусть $x \vdash y$ доказуема в S^2. Тогда на основании *MT*1I7 доказуема $x^* \vdash y^*$, где x^* и y^* суть канонические формы для x и y соответственно. Используя *T*1 и *T*2, можно получить $x^* (z : \sim z) \vdash$ $\vdash y^* (w : \sim w)$. От этой формулы на основании *A*13, *A*3, *R*2 можно перейти к $x^* (z : \sim z) \vdash y^* v (w : \sim w)$. Приведение данной формулы к канонической форме дает формулу $x^{**} \vdash y^{**}$.

Пусть $x^{**} \vdash y^{**}$ доказуема в S^2. На основании *A*13, *T*10I2, *T*1,*T*2, *A*3, *R*3 и *R*1 можно получить формулу $x^* \vdash$ $\vdash y^*$. В силу *MT*1I7 отсюда имеем, что $x \vdash y$ также доказуема в S^2.

*MT*3. Если $x \vdash y$ — тавтология, в x и y есть по крайней мере одно одинаковое вхождение элементарного высказывания, и при этом $x \vdash y$ находится в канонической форме, то она доказуема в S^2.

Доказательство *MT*3 полностью совпадает с доказательством аналогичной метатеоремы для системы S^1. Из *MT*1 — *MT*3 следует:

*MT*4. Если $x \vdash y$ есть тавтология, и в x и y есть по крайней мере одно одинаковое вхождение элементарного высказывания, то $x \vdash y$ доказуема в S^2.

§ 4. Система S_2

Система S_2 ослабленного следования получается из S_1 так же, как S^2 из S^1 (дополнительная аксиомная схема будет иметь номер *A*12). Система S_2 сформулирована в [4, 5].

Доказательство полноты S_1 сохраняет силу и для S_2, как показала А. М. Федина [14], поскольку в доказательстве всех ранее рассмотренных теорем $MT1\text{II}2$ — $MT5\text{II}2$ ограничение на $R1$ выполняется. Только незначительно модифицируется доказательство $MT1\text{II}2$ следующим дополнением. Пусть $q^1, \ldots, q^l$ суть все элементарные высказывания, входящие в y и отсутствующие в x. В таком случае

$$x(q^1 \vee \sim q^1) \ldots (q^l \vee \sim q^l) \vdash$$
$$\vdash y(p^1 \vee \sim p^1) \ldots (p^k \vee \sim p^k).$$

А для $x(q^1 \vee \sim q^1) \ldots (q^l \vee \sim q^l)$ имеется x^* в канонической форме такое, что

$$x(q^1 \vee \sim q^1) \ldots (q^l \vee \sim q^l) \dashv\vdash x^*$$

Из полноты S^2 и S_2 следует и эквивалентность.

§ 5. Системы S^w

Системы ослабленного следования S^2 и S_2 и другие, эквивалентные им системы будем обозначать символом S^w. Е. А. Сидоренко в работе [10] исследовал такие системы S^w.

Система S_2^* ослабленного следования получается из S_1^* путем снятия ограничения на R^*4 и принятия ограничения на $R1$, аналогичного ограничению $R1$ в S^2.

Если в S_1^{**} отбросить $A8$, снять ограничение на $R3^{**}$, а правило $R1$ принять с указанным в S_2^* ограничением, то получим систему S_2^{**}, эквивалентную S_2. В этой системе правило подстановки эквивалентности (правило $R3$) не является основным.

Аксиомная схема $A8$ не является независимой в S_2, это видно уже из того, что она не является таковой в S_1^*.

Независимость $A12$ в S_2 следует из того факта, что это единственная схема, которая в правой части формул $x \vdash y$ допускает элементарное высказывание, отсутствующее в левой.

Доказательство независимости остальных схем и правил не отличается от доказательства их независимости в S_1.

Проблема независимости S_2^* решается тем же способом, что и для S_1^*.

Для доказательства независимости S_2^{**} принимается та же интерпретация, что и для соответствующих схем и правил системы S_1^{**}.

Доказательство $A8$ в S_2:

1. $x(x \vee y) \vdash x$	[$A3$]
2. $x \vdash x$	[$A1$, $A2$, $R1$]
3. $x \vdash x \vee y$	[$A12$]
4. $x \vdash x(x \vee y)$	[2, 3, $R2$]
5. $\sim(x(x \vee y)) \vdash \sim x$	[1, 4, $R1$]
6. $\sim x \vee \sim x \sim y \vdash \sim x$	[1, 4, $A9$, $A10$]
7. $x \vdash x \vee xy$	[$A12$]
8. $x \vee xy \vdash x$	[6]
9. $xz \vee yz \vdash xz \vee yz \vee z$	[$A12$]
10. $xz \vee yz \vdash z$	[7—9, $R1$]
11. $xz(x \vee y) \vee yz(x \vee y) \vdash x \vee y$	[10]
12. $xz(x \vee y) \vdash xz$	[$A3$]
13. $xz \vdash xz(x \vee y)$	[$A12$, $A3$, $R1$, 2, $R2$]
14. $yz \vdash yz(x \vee y)$	[13, $A4$]
15. $yz(x \vee y) \vdash yz$	[$A3$]
16. $xz \vee yz \vdash x \vee y$	[11—15, $R1$]
17. $xz \vee yz \vdash (x \vee y)z$	[10, 16, $R2$]

§ 6. Системы, сходные с S^w

Если в системах Аккермана, Андерсона и Белнапа (см. о них в [8]) только один знак сильной импликации рассматривать как знак следования в нашем смысле, то полученные системы будут непарадоксальны в том же смысле, что и S^w. Но эти системы не являются полными в смысле полноты S^w.

Неполнота системы Аккермана видна из такого рассуждения. В системе Аккермана доказуемы формулы (стрелка — знак сильного следования)

$$\sim xx \mapsto \sim xx \vee \sim xy$$
$$\sim xx \vee \sim xy \mapsto \sim x(x \vee y),$$

из которых по транзитивности получилась бы парадоксальная формула

$$\sim xx \to y,$$

если бы была доказуема формула

$$\sim x(x \vee y) \to y.$$

Во избежание парадокса система построена так, что последняя оказалась недоказуемой. Так что целый класс формул, удовлетворяющих теореме непарадоксальности S^w, здесь выпадает. Аналогично обстоит дело с системами сильной импликации Андерсона и Белнапа.

Система, непарадоксальная в смысле S^w, но точно также неполная, построена Л. А. Бобровой в работе [2] (путем ослабления нашей системы S^s). Система Бобровой с точки зрения теории логического следования безусловно предпочтительнее систем Аккермана, Андерсона и Белнапа, в которых исключение парадоксов материальной и строгой импликации достигается ценой исключения правил следования, интуитивно непарадоксальных и вообще не вызывающих сомнений (подробнее об этом см. [8]).

Неполнота систем следования в нашем смысле не исключает их полноту в некотором другом смысле. Такой является, как показал Е. А. Сидоренко [10], система S_2^1, в которой принимаются аксиомные схемы $A1 - A10$

системы S_1 и следующие правила вывода:

$R1$. Если $x \vdash y$, то $\sim y \vdash \sim x$

$R2$. Если $x \vdash y$ и $y \vdash z$, то $x \vdash z$

$R3$. Если $x \vdash y$ и $z \vdash v$, то $x \vee z \vdash y \vee v$.

Выражение «дизъюнктивная нормальная форма» будет употребляться здесь в обычном смысле: $x^1 \vee \ldots \vee x^n$ $(n \geqslant 1)$ находится в дизъюнктивной нормальной форме, если и только если каждое x^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ есть конъюнкция, образованная из элементарных высказываний и отрицаний элементарных высказываний. Элементарные высказывания и отрицания элементарных высказываний, входящие в x^i, суть конъюнктивные составляющие x^i. Высказывание x приводится к дизъюнктивной нормальной форме y (или y есть дизъюнктивная нормальная форма x), если и только если y находится в дизъюнктивной нормальной форме, и при этом $x \vdash y$ и $y \vdash x$ доказуемы в данной системе.

Правила $R2$ и $R3$ системы S_1 тривиально получаются в S_2^1. Обозначим их соответственно R^*4 и R^*5. Доказуема теоремная схема $x \vdash x \vee y$. Доказуема также метатеорема о том, что каждое высказывание в S_2^1 приводится к дизъюнктивной нормальной форме, и все вытекающие из нее следствия.

Нам важны здесь такие метатеоремы S_2^1:

*МТ*1. Если $x \vdash y$ доказуема в S_2^1, и при этом $x^1 \vee \ldots \vee x^n$ есть дизъюнктивная нормальная форма x, а $y^1 \vee \ldots \vee y^m$ есть дизъюнктивная нормальная форма y, то для каждого x^i найдется y^j такое, что $x^i \vdash y^j$ есть тавтология, и каждая конъюнктивная составляющая y^j входит в x^i.

*МТ*2. Если $x^1 \vee \ldots \vee x^n$ есть дизъюнктивная нормальная форма x, а $y^1 \vee \ldots \vee y^m$ дизъюнктивная нормальная форма y, и если для каждого x^i найдется y^j такое, что $x^i \vdash y^j$

есть тавтология, и каждая конъюнктивная составляющая y^j входит в x^i, то $x \vdash y$ доказуема в S_2^1 (теорема полноты).

Справедливость $MT1$ видна из того, что она имеет силу для всех аксиом S_2^1, а правила вывода S_2^1 сохраняют это свойство. Справедливость $MT2$ видна из следующего: если $x^i \vdash y^j$ есть тавтология указанного вида, то она доказуема в S_2^1; тогда согласно теоремной схеме $a \vdash a \vee b$ будет доказуема $x^i \vdash y^1 \vee \ldots \vee y^m$; а так как по условию это имеет место для каждого x^i, то доказуемы $x^1 \vdash y^1 \vee \ldots \vee y^m, \ldots, x^n \vdash y^1 \vee \ldots \vee y^m$ и согласно $R3$ доказуема $x^1 \vee \ldots \vee x^n \vdash y^1 \vee \ldots \vee y^m$; поскольку доказуемы $x \dashv\vdash x^1 \vee \ldots \vee x^n$ и $y \dashv\vdash y^1 \vee \ldots \vee y^m$, по R^*5 доказуема $x \vdash y$.

В S_2^1 является производным следующее интересное правило вывода:

R^*6. Если $x \vdash y$, где x и y находятся в дизъюнктивной нормальной форме, то $x^* \vdash y^*$, которая получается из $x \vdash y$ путем подстановки на место конъюнктивных составляющих в x и в y любых высказываний, причем вместо элементарного высказывания и его отрицания могут быть подставлены разные высказывания.

$MT3$. Если правило R^*6 принять в качестве основного, то присоединение к аксиомам полученной системы любой недоказуемой формулы позволяет доказать в ней любую формулу $a \vdash b$.

Доказательство $MT3$. Пусть $x \vdash y$ недоказуема в S_2^1. Пусть $x^1 \vee \ldots \vee x^n$ и $y^1 \vee \ldots \vee y^m$ суть дизъюнктивные нормальные формы соответственно x и y. В силу теоремы полноты найдется такое x^i, что среди $y^1, \ldots, y^m$ нет такого y^j, что все его конъюнктивные составляющие входят в x^i. В противном случае $x \vdash y$ была бы доказуема. Добавим $x \vdash y$ к аксиомным схемам S_2^1 и добавим к правилам вывода R^*6. В таком случае будет доказуема $x^1 \vee \ldots \vee x^n \vdash y^1 \vee \ldots$ $\ldots \vee y^m$, и в силу теоремной схемы $a \vdash a \vee b$ получим $x^i \vdash y^1 \vee \ldots \vee y^m$. Тогда во всякое y^j будет входить какая-то конъюнктивная составляющая, отсутствующая в x^i. В силу R^*6 мы можем вместо таких составляющих подставить высказывание z с элементарными высказываниями, отсутствующими в рассматриваемой формуле. В силу $A3$ имеем $y^j \vdash z$. Согласно теоремной схеме $ac \vee bc \vdash$ $\vdash (a \vee b) c$ получим $y^1 \vee \ldots \vee y^m \vdash z$, и по $R2$ получим $x^i \vdash z$. Подставляя вместо конъюнктивных составляющих x^i любое высказывание v по R^*6, получим $v \vdash z$, где v и z суть любые высказывания.

Таким образом, система S_2^1 с правилом R^*6 полна в смысле $MT3$.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ДРУГИЕ ФОРМЫ СЛЕДОВАНИЯ

§ 1. Максимальное следование

Система S^3 максимального следования, изложенная в [3, 5], получается из S^1 путем принятия такого ограничения $A3$: в y входят только те элементарные высказывания, которые входят в x.

Формулировку S^3 можно ослабить, как показал Г. А. Смирнов [13], приняв такое ограничение к $A3$: в x и y входят одинаковые элементарные высказывания.

Непротиворечивость S^3 очевидна (из непротиворечивости S^1).

*MT*1. Если $x \vdash y$ доказуема в S^3, то множества входящих в x и y элементарных высказываний совпадают. Доказательство *MT*1 тривиально: все аксиомы S^3 обладают указанным свойством, а правила вывода это свойство сохраняют.

*T*1. $(x:y)\,z \vdash xz:yz$

1. $(x:y)\,z \vdash y:xz$ [*A*14, *T*8 I2, *R*2]
2. $(x:y)\,z \vdash (x:y)\,z$ [*T*2 I2]
3. $(x:y)\,z \vdash (y:xz)\,z\,(x:y)\,z$ [1, 2, *R*2, *T*3I2, *T*4I2, *R*3]
4. $(x:y)\,z \vdash (y:xz)\,z$ [3, *A*3, *R*1]
5. $(x:y)\,z \vdash xz:yz$ [4, *A*14, *T*8 I2, *R*1]

*T*2. $xz:y \vdash (xz:y)\,(x:\sim x)$

1. $xz:y \vdash xz \sim y:\sim(xz)\,y$ [*T*17 I2]

2. $xz : y \vdash xz \sim y : \sim xzy : x \sim zy : \sim x \sim zy$

$[1,\ A7,\ A13,\ T10\ \mathrm{I}2,\ R3,\ A12,\ R1]$

3. $xz : y \vdash (xz \sim y : \sim xzy : x \sim zy : \sim x \sim zy) \cdot$

$\cdot (x : \sim x)$ $[2,\ T18\ \mathrm{I}2,\ T19\ \mathrm{I}2,\ R3,\ A13,\ R1]$

4. $xz : y \vdash (xz : y)(x : \sim x)$ $[3,\ A11,\ T17\mathrm{I}2,\ R3,\ R1]$

Используя данные для S^1 определения канонической формы высказываний, введем определение:

$D1$. Формула $x^* \vdash y^{**}$ есть каноническая форма для $x \vdash y$, если и только если x^* есть каноническая форма для x, а y^{**} — для y^*z, где y^* есть каноническая форма для y, а z есть высказывание вида $z^1 \cdot z^2 \cdot \ldots \cdot z^m$ $(m \geqslant 0)$ (где z^i есть $\sim a^i a^i$, которое входит в каноническую форму для x, но не входит в каноническую форму для y).

В отношении S^3 будут иметь место следующие метатеоремы, доказательство которых получается путем очевидных модификаций доказательства $MT2\mathrm{I}7$ и $MT3\mathrm{I}7$.

$MT2$. Если $x \vdash y$ есть тавтология, и множества элементарных высказываний, входящих в x и y, совпадают, то для нее может быть найдена каноническая форма $x^* \vdash$ $\vdash y^{**}$. При этом в $x^* \vdash y^{**}$ множества элементарных высказываний, входящих в x^* и y^{**}, точно также совпадают.

$MT3$. Формула $x \vdash y$ доказуема в S^3, если и только если ее каноническая форма $x^* \vdash y^{**}$ доказуема в S^3.

$MT4$. Если $x \vdash y$ есть тавтология, множества элементарных высказываний, входящих в x и y совпадают, и при этом $x \vdash y$ находится в канонической форме, то $x \vdash y$ доказуема в S^3.

Доказательство $MT4$ совпадает с доказательством $MT5\mathrm{I}7$, за исключением тех шагов в доказательстве $MT5\mathrm{I}7$, где применяется $T3I7$, недоказуемая в S^3. Нетрудно убедиться, что применение $T3\mathrm{I}7$ при доказательстве полноты S^3 можно заменить применением выводимых в S^3 теорем $T13\mathrm{I}2$ и $T14\mathrm{I}2$ с использованием $A11$, $A12$ и $R3$.

Из $MT2$ — $MT4$ следует:

$MT5$. Если $x \vdash y$ есть тавтология, и множества входящих в x и y элементарных высказываний совпадают, то $x \vdash y$ доказуема в S^3.

Изложенное доказательство $MT5$ (т. е. полноты S^3) дано Г. А. Смирновым в [13].

Система S_3 максимального следования, эквивалентная S^3, образуется из S_1 путем аналогичного ограничения.

Для доказательства полноты S_3, как показала А. М. Федина [14], достаточно доказать $MT4$II2 так, чтобы выполнилось ограничение на $A3$. Оно примет такой вид.

1.	$(x \vee y)\, z \vdash (x \vee y)\, z$	
2.	$(x \vee y)\, z \vdash (xz \vee y)$	[$A7$]
3.	$(x \vee y)\, z \vdash (x \vee y)\, z\, (xz \vee y)$	[$R2$, 1, 2]
4.	$(x \vee y)\, z\, (xz \vee y) \vdash (xz \vee y)\, z$	
5.	$(xz \vee y)\, z \vdash (xz \vee yz)$	[$A7$, $A4$]
6.	$(x \vee y)\, z \vdash (xz \vee yz)$	[$R1$, 3, 4, 5]
7.	$(xz \vee yz) \vdash (x \vee y)\, z$	[$A8$]

При доказательстве остальных метатеорем ограничение на $A3$ выполняется.

Другой вариант системы максимального следования S_3^*, предложенный Е. А. Сидоренко [10], получается из S_3 заменой $R1$ и $R3$ соответственно на R^*1 и R^*3 и добавлением аксиомной схемы A^*12:

A^*12. $x \vee x \vdash x$

R^*3. Если $x \vdash y$ и $z \vdash v$, то $x \vee z \vdash y \vee v$.

Эквивалентность S_3^* и S_3 получается путем доказательства $R1$ (методом математической индукции по числу вхождений логических операторов в x) и $R4$ (оно следует из R^*3, R^*1, $A9$, $A10$, A^*12) в S_3^*.

Независимость аксиомных схем и правил S_3 доказывается (это сделано в работе Е. А. Сидоренко [11]) той же интерпретацией, что и независимость соответствующих аксиомных схем и правил системы S_1. Независимость аксиомной схемы $A3$ в S_3^* доказывается при помощи трехзначных таблиц: $xy = 2$, когда x или y равно 2, и $xy = \max(x, y)$ в остальных случаях; $x \vee y = 2$, когда x или y равно 2, и $x \vee y = \min(x, y)$ в остальных случаях; $\sim x = 2$, когда $x = 3$, и $\sim x = 3$ в остальных случаях; $x \vdash y$ принимает неотмеченное значение только в случае, когда значение x равно 1 или 2, а значение y равно 3. При этом теорема $\sim pp \vdash p$ принимает неотмеченное значение при $p = 3$. Независимость A^*12 доказывается при помощи трехзначных таблиц: $xy = 1$, когда $x = 1$ и $y = 1$, и $xy = 3$ в остальных случаях; $x \vee y = 3$; когда $x = 3$ и $y = 3$, и $x \vee y = 1$ в остальных случаях, $\sim x = 4 - x$; значение $x \vdash y$ равно 1 тогда и только тогда, когда значение x больше или равно значению y. Независимость правила R^*3 доказывается при помощи трехзначных таблиц: $xy = \max(x, y)$; $x \vee y = 2$, когда x и y равны 2, $x \vee y = 3$, когда x и y равны 3, и $x \vee y = 1$ в остальных случаях; $\sim x = 3$, когда $x = 1$, и $\sim x = 1$ в остальных случаях; $x \vdash y$ принимает неотмеченное значение только в случае, когда значение x равно 1, а значение y равно 2 или 3. При этом теорема $p \vee q \vdash \vdash \sim\sim p \vee q$ принимает неотмеченное значение при $p = 2$ и $q = 3$. Для доказательства независимости остальных аксиомных схем и правил принимается та же интерпретация, что и в S_1.

Системы максимального следования, эквивалентные S^3 и S_3, обозначим S^m.

§ 2. Конверсное следование

Система S^4 конверсного следования, сформулированная в [4, 5], получается из S^3 путем добавления аксиомной схемы

$A15$. $\sim x \vdash \sim (xy)$.

Прежде всего заметим, что все теоремы и метатеоремы S^3 имеют силу в отношении S^4, так как S^3 является частью системы S^4. Непротиворечивость S^4 следует из того факта, что все аксиомы вида $\sim x \vdash \sim (x\ y)$ суть тавтологии.

В S^4 имеет место следующая метатеорема:

*MT*1. Если $x \vdash y$ доказуема в S^4, то в x входят только те элементарные высказывания, которые входят в y.

Доказательство *MT*1. 1 случай: $x \vdash y$ — аксиома S^4. Легко проверить, что в x входят только те элементарные высказывания, которые входят в y. 2 случай: $x \vdash y$ получена из $x \vdash z$ и $z \vdash y$ путем применения правила $R1$. Если в x входят только те элементарные высказывания, которые входят в z, а в z входят только те, которые входят в y, то и в x будут входить только те элементарные высказывания, которые входят в y. 3 случай: $x \vdash y$ имеет вид $x \vdash zv$ и получена из $x \vdash z$ и $x \vdash v$ путем применения правила R_2. Если в посылках $x \vdash z$ и $x \vdash v$ в x входят только те элементарные высказывания, которые входят в z и v, то и в заключении $x \vdash zv$ в x будут входить только те элементарные высказывания, которые входят в zv. 4 случай: y в $x \vdash y$ получено из x путем замены вхождения (по крайней мере одного) z в x на v, причем $z \vdash v$ и $v \vdash z$. Если в $z \vdash v$ в z входят только те элементарные высказывания, которые входят в v, а в $v \vdash z$ в v входят только те элементарные высказывания, которые входят в z, то множества элементарных высказываний, входящих в v и в z, совпадают. Поэтому в заключении $x \vdash y$ в x входят только те элементарные высказывания, которые входят в y.

*T*1. $x \vdash x (y : \sim y)$

1. $\sim x \vdash \sim x \sim y : xy : \sim x \sim y$ [*A*15, *A*7, *R*1]
2. $x \vdash xy : \sim x \sim y : x \sim y$ [1]
3. $x \vdash (\sim x \sim y : xy : x \sim y)\, x$ [2, *T*2I2, *T*8I2, *R*2, *R*1]

4. $x \vdash xy : x \sim y$ [3, $A14$, $A11 - A13$, $T10I2$, $T13I2$, $T14I2$, $R3$, $R2$]

5. $x \vdash x(y : \sim y)$ [4, $A13$, $R1$]

Введем, далее, определение канонической формы для формулы следования системы S^1.

$D1$. Формула $x^{**} \vdash y^{**}$ есть каноническая форма для $x \vdash y$, если и только если: 1) x^{**} есть каноническая форма для x^* (z: $\sim z$), где x^* есть каноническая форма для x, а z есть конъюнкция элементарных высказываний, входящих в y, но не входящих в x; 2) y^{**} есть каноническая форма для y^*v, где y^* есть каноническая форма для y, а v есть $z^1 \cdot \ldots \cdot z^m$ ($m \geqslant 0$) (где z^i есть $\sim a^i a^i$, входящее в x^*, но не входящее в y^*).

$MT2$. Если $x \vdash y$ — тавтология, и в x входят только те элементарные высказывания, которые входят в y, то для нее может быть найдена каноническая форма $x^{**} \vdash$ $\vdash y^{**}$. При этом $x^{**} \vdash y^{**}$ является тавтологией, и множества элементарных высказываний, входящих в x^{**} и y^{**} совпадают.

Доказательство $MT2$. Не основании $MT1I7$, имеющей силу и для S^4, для любой формулы $x \vdash y$ может быть найдена формула $x^* \vdash y^*$, где x^* и y^* суть соответственно канонические формы для x и y. Из определения канонической формы для высказываний, $MT1I5$ и $MT4I5$ следует, что x и x^*, y и y^* соответственно равнозначны, и множества элементарных высказываний, входящих в них, совпадают. Так как в x входят только те элементарные высказывания, которые входят в y, то может быть найдено такое x^* (z : $\sim z$), удовлетворяющее условиям $D1$, что множество элементарных высказываний, входящих в него, совпадает с множеством элементарных высказываний, входящих в y. С другой стороны, может быть найдено такое y^*v, удовлетворяющее условиям $D1$, что все высказывания вида $\sim a^i a^i$, входящие в x^*, будут входить и в y^{**}. Для x^* (z : $\sim z$) и y^*v может быть найдена их каноniческая форма. Очевидно, что множества элементарных высказываний, входящих в x^{**} и y^{**}, совпадают. При этом, если $\sim x$ не есть тавтология, y^{**} имеет вид y^{*}, и значение $x^{**} \vdash y^{**}$ совпадает с $x^{*} \vdash y^{*}$. Следовательно, $x^{**} \vdash y^{**}$ является в данном случае тавтологией. Если $\sim x$ есть тавтология, то x^{**} принимает значение 0 при любых комбинациях значений входящих в него элементарных высказываний. Поэтому и в этом случае $x^{**} \vdash y^{**}$ есть тавтология.

*MT*3. Формула $x \vdash y$ доказуема в S^4, если и только если ее каноническая форма $x^{**} \vdash y^{**}$ доказуема в S^4.

Доказательство *MT*3. Пусть $x \vdash y$ доказуема в S^4. В силу *MT*1I5, *MT*4I5, *MT*2 формула $x^{**} \vdash y^{**}$ является тавтологией, причем множества элементарных высказываний, входящих в x^{**} и y^{**}, совпадают. Так как S^3 полна относительно тавтологий вида $x \vdash y$, где в x и в y входят одни и те же элементарные высказывания, то $x^{**} \vdash y^{**}$ доказуема в S^4.

Пусть $x^{**} \vdash y^{**}$ доказуема в S^4. Тогда на основании *D*1 и *T*1 доказуема формула $x^{*} \vdash y^{**}$. Отсюда по *A*13 и *A*3 получаем формулу $x^{*} \vdash y^{*}$. От этой формулы на основании *MT*1I7 можно перейти к формуле $x \vdash y$.

*MT*4. Если формула $x \vdash y$ — тавтология, в x входят только те элементарные высказывания, которые входят в y, и при этом $x \vdash y$ находится в канонической форме, то она доказуема в S^4.

Доказательство *MT*4 совпадает с доказательством *MT*5I7. Из *MT*2 — *MT*4 следует:

*MT*5. Если $x \vdash y$ есть тавтология, и в x входят только те элементарные высказывания, которые входят в y, то $x \vdash y$ доказуема в S^4.

Изложенное доказательство *MT*5 (полноты S^4) дано Г. А. Смирновым [13].

Система S_4 конверсного следования, эквивалентная S^4, получается из S_3 путем добавления аксиомной схемы

*A*12. $x \vdash x \vee y$

Независимость $A12$ в S_4 (как и в S^4) очевидна: она — единственная схема, допускающая появление в консеквенте доказуемых формул таких элементарных высказываний, которые отсутствуют в антецеденте.

Доказательство полноты S_4, построенное А. М. Фединой [14], имеет следующий вид.

Пусть $x \vdash y$ — тавтология. Тогда в силу $MT1\text{II}2$ формула $x^* \vdash y^*$, где x^* и y^* суть канонические формы x и y соответственно, так же является тавтологией. Подстановка вместо элементарного высказывания q^i, встречающегося в x, а значит и в y, выражений вида $q^i (p^k \vee \sim p^k)$, где p^k — элементарное высказывание, встречающееся в y, но отсутствующее в x, так же дает нам тавтологию. Применение $T1\text{II}2$ и $R3$ к полученным выражениям дает нам опять-таки дизъюнкцию конъюнкций всех элементарных высказываний или их отрицаний, встречающихся в x плюс p^k. Таким образом, в x^* вводятся все элементарные высказывания, встречающиеся в y, но отсутствующие в x. В y повторения элементарных высказываний элиминируются по $zz \dashv\vdash z$. При этом получается $x^{**} \vdash y^{**}$ сохраняющая свойство тавтологичности и обладающая тем свойством, что в антецеденте и консеквенте встречаются одни и те же элементарные высказывания. Дальнейшее доказательство теоремы о полноте остается тем же, что и в S_1.

Система S_4^*, эквивалентная S_4, получается из S_4 путем замены $A3$, $A8$ и $A11$ на аксиомную схему $A^{**}12$ и правило R^*5:

$A^{**}12.\ x \vdash x (y \vee \sim y)$

R^*5. Если $x \vdash z$ и при этом в y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в z, то $xy \vdash z$.

Независимость R^*5 доказывается той же интерпретацией, что и независимость $A3$ в S_1. Независимость остальных аксиомных схем и правил доказывается так же, как в S_2.

Система S_4^{**}, эквивалентная S_4, получается из S_3^* добавлением A^*12. При этом отпадает необходимость в $A3$. Системы S_4^* и S_4^{**} найдены и исследованы Е. А. Сидоренко [10].

Системы конверсного следования, эквивалентные S^4 и S_4, будем обозначать символом S^c.

§ 3. Вырожденное следование

Система S^5 с вырожденным следованием, сформулированная в [3—5], получается путем принятия S^s и следующих дополнений к ней.

$D1$. $\vdash x$ есть формула вырожденного следования, если и только если x есть высказывание.

Дополнительная аксиомная схема:

A^d1. $\vdash \sim(\sim xx)$

Дополнительное правило:

R^d1. Если $x \vdash y$ и $\vdash x$, то $\vdash y$.

$D2$. Формула $\vdash x$ доказуема (есть теорема) в S^5, если и только если она есть аксиома или получается из доказуемых формул по правилу R^d1.

$MT1$. Если $\vdash x$ доказуема в S^5, то x есть тавтология.

Теорема $MT1$ очевидна: A^d1 есть тавтология, а R^d1 свойство тавтологичности сохраняет.

$MT2$. Если x есть высказывание, а y есть его каноническая форма, то $x \dashv\vdash y$ доказуемы в S^5.

Доказательство $MT2$. Пусть x есть элементарное высказывание p. В таком случае каноническая форма для x есть $p \vee \sim pp$

1. $p \vdash p$
2. $p \vdash p(p \vee \sim p)$
3. $p \vdash pp \vee \sim pp$
4. $p \vdash p \vee \sim pp$
5. $p \vee \sim pp \vdash pp \vee \sim pp$
6. $pp \vee \sim pp \vdash (p \vee \sim p)p$
7. $(p \vee \sim p)p \vdash p$
8. $p \vee \sim p \vdash p$

Таким образом, доказуема $x \dashv\vdash y$. Аналогично для $\sim p$.

Пусть x есть $y^1 \cdot \ldots \cdot y^n$ $(n \geqslant 2)$; $y_1, \ldots, y_n$ суть канонические формы соответственно для $y^1, \ldots, y^n$; $y^i \dashv\vdash y_i$ доказуемы; $v^1 \vee \ldots \vee v^m$ есть каноническая форма для x.

1. $y^1 \cdot \ldots \cdot y^n \dashv\vdash y_1 \cdot \ldots \cdot y_n$
2. $y_1 \cdot \ldots \cdot y_n \dashv\vdash v^1 \vee \ldots \vee v^m$
3. $y^1 \cdot \ldots \cdot y^n \dashv\vdash v^1 \vee \ldots v^m$

Таким образом, $x \dashv\vdash y$ доказуема.

Пусть x есть $y^1 \vee \ldots \vee y^n$; y_i и $v^1 \vee \ldots \vee v^m$ те же, что и выше.

1. $y^1 \vee \ldots \vee y^n \dashv\vdash y_1 \vee \ldots \vee y_n$
2. $y_1 \vee \ldots \vee y_n \dashv\vdash v^1 \vee \ldots \vee v^m$
3. $y^1 \vee \ldots \vee y^n \dashv\vdash v^1 \vee \ldots \vee v^m$

Таким образом, доказуема $x \dashv\vdash y$.

Пусть, наконец, x есть $\sim z$; v есть каноническая форма для z; $z \dashv\vdash v$ доказуемы; $v^n \vee \ldots \vee v^m$ есть каноническая форма для x.

1. $\sim z \dashv\vdash \sim v$
2. $\sim v \dashv\vdash v^1 \vee \ldots \vee v^m$
3. $\sim z \dashv\vdash v^1 \vee \ldots \vee v^m$

Таким образом, $x \dashv\vdash y$ доказуема.

*МТ*3. Если x находится в канонической форме и есть тавтология, то $\vdash x$ доказуема в S^5.

Доказательство *МТ*3. Пусть в x входит только одно элементарное высказывание p. В таком случае x есть $p \vee \sim p$. Но $\vdash (p \vee \sim p)$ доказуема в силу A^d1, $A9$, $A10$, R^d1.

Пусть в x входит n элементарных высказываний $p^1, \ldots$ $\ldots, p^n$ $(n \geqslant 2)$ и не входят никакие другие. В таком случае x имеет вид $y^1 \vee \ldots \vee y^k$, где $y^1, \ldots, y^k$ суть всевозможные конъюнкции, образованные из p^1, ..., p^n и их отрицаний ($k = 2^n$).

1. $\vdash ((p^1 \cdot \ldots \cdot p^n) \vee \sim (p^1 \cdot \ldots \cdot p^n))$
2. $\vdash ((p^1 \cdot \ldots \cdot p^n) \vee (\sim p^1 \vee \ldots \vee \sim p^n))$
3. $\vdash ((p^1 \cdot \ldots \cdot p^n) \vee (\sim p^1 \vee \ldots \vee \sim p^n)) (p^n \vee \sim p^n)$
4. $\vdash ((p^1 \cdot \ldots \cdot p^n) (p^n \vee \sim p^n) \vee$
$\vee (\sim p^1 \vee \ldots \vee \sim p^n) (p^n \vee \sim p^n))$
5. $(p^1 \cdot \ldots \cdot p^n) (p^n \vee \sim p^n) \dashv\vdash (p^1 \cdot \ldots \cdot p^n)$
6. $(\sim p^1 \vee \ldots \vee \sim p^n) (p^n \vee \sim p^n) \dashv\vdash$
$\dashv\vdash \sim p^1 (p^n \vee \sim p^n) \vee \ldots \vee \sim p^n (p^n \vee \sim p^n)$
7. $\vdash (p^1 \cdot \ldots \cdot p^n) \vee (\sim p^1 (p^n \vee \sim p^n) \vee \ldots \vee \sim p^n)$

Аналогично для остальных $n - 1$ элементарных высказываний. В результате получим, что

$$\vdash (p^1 \cdot \ldots \cdot p^n) \vee (\sim p^1 (p^n \vee \sim p^n) \ldots (p^2 \vee \sim p^2)) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (\sim p^n (p^{n-1} \vee \sim p^{n-1}) \ldots (p^1 \vee \sim p^1))$$

доказуема в S^5. Отсюда в соответствии с $A5 - A8$ получаем, что доказуема $\vdash y^1 \vee \ldots \vee y^k$.

Из $MT2$ следует: если y есть каноническая форма для x, и при этом x есть тавтология, то y есть тавтология. Отсюда получаем: если x есть тавтология, то y есть тавтология, и $\vdash y$ доказуема (в силу $MT3$). Но согласно $MT2$ формула $y \vdash x$ доказуема. Отсюда по R^d1 получаем, что $\vdash x$ доказуема. Таким образом, верна теорема полноты S^5:

$MT4$. Если x есть тавтология, то $\vdash x$ доказуема в S^5.

Изложенное доказательство $MT4$ дано Л. А. Бобровой в [1].

Независимость A_1^d и R_1^d и непротиворечивость S^5 очевидны.

$MT5$. Если $x \vdash y$ и $\vdash \sim y$ доказуемы в S^5, то $\vdash \sim x$ доказуема в S^5.

$MT6$. Если $\vdash x$ и $\vdash y$ доказуемы в S^5, то $\vdash xy$ доказуема в S^5.

Теоремы $MT5$ и $MT6$ следуют из $MT4$. Их можно использовать как производные правила вывода. Поскольку в дальнейшем в связи с расширением S^5 эти правила окажутся независимыми от R_1^d, поэтому мы примем также следующие правила:

R^d2. Если $x \vdash y$ и $\vdash \sim y$, то $\vdash \sim x$.

R^d3. Если $\vdash x$ и $\vdash y$, то $\vdash xy$.

$MT7$. Если $\vdash x$ доказуема в S^5, то $\vdash y$, образующаяся путем подстановки высказывания z на место элементарного высказывания v везде, где v входит в x, доказуема в S^5 (правило подстановки).

§ 4. Квазиследование

Система S^6 квазиследования, сформулированная в [3—5], образуется путем присоединения к S^5 следующего правила:

R^k1. Если $xz \vdash y$ и $\vdash z$, то $x \vdash y$.

$MT1$. Если $x \vdash y$ доказуема S^6, то она есть тавто логия (теорема очевидна)

$MT2$. Если $x \vdash y$ есть тавтология, то она доказуема в S^6.

Доказательство $MT2$. Пусть $x \vdash y$ есть тавтология. Возможны три случая вхождения элементарных высказываний в x и y : 1) множество элементарных высказываний, входящих в y, совпадает с множеством элементарных высказываний, входящих в x; 2) в y входят только те элементарные высказывания, которые входят в x; 3) в y входит по крайней мере одно элементарное высказывание, не входящее в x. Если имеют место случаи 1 и 2, то $x \vdash y$ доказуема в S^6. Если $x \vdash y$ есть тавтология вида 1 или 2, то $x \vdash y$ доказуема в S^s согласно теореме о полноте S^s. Но согласно определению доказуемой формулы квазиследования имеем: если $x \sim (\sim pp) \vdash y$ и $\vdash \sim (\sim pp)$ доказуемы, то $x \vdash y$ доказуема. Формула $\vdash \sim (\sim pp)$, очевидно, доказуема. Формула $x \sim (\sim pp) \vdash y$ доказуема согласно $R1$ и доказанным выше формулам. Таким образом, $x \vdash y$ доказуема. Рассмотрим случай 3. Пусть $p^1, \ldots, p^n$ $(n \geqslant 1)$ суть все элементарные высказывания, входящие в y и не входящие в x. В таком случае формула $x((p^1 \cdot \ldots \cdot p^n) \vee \sim (p^1 \cdot \ldots \cdot p^n)) \vdash y$ будет тавтологией и будет доказуема в S^s в силу теоремы о полноте. Но формула $\vdash (p^1 \cdot \ldots \cdot p^n) \vee \sim (p^1 \cdot \ldots \cdot p^n)$ доказуема в S^6. Следовательно, $x \vdash y$ доказуема согласно определению доказуемой формулы квазиследования.

Система квазиследования S^{*6}, эквивалентная S^6, получается из S_2 путем снятия ограничения на $R2$.

*МТ*3. Если $x \supset y$ есть тавтология, то $x \vdash y$ доказуема в S^{*6}.

Доказательство *МТ*3.

1.	$x(y \vee \sim y) \vdash x$	$[A3]$
2.	$x \vdash zy \vee x$	$[A12,\ R1,\ a \vee b \vdash b \vee a]$
3.	$zy \vee x \vdash (zy \vee x)(y \vee \sim y)$	$[A11]$
4.	$zy \vee x \vdash y \vee \sim y$	$[A3,\ R1]$
5.	$x \vdash y \vee \sim y$	$[2,\ 3,\ 4,\ R1]$
6.	$x \vdash x$	$[A1,\ A2,\ R1]$
7.	$x \vdash x(y \vee \sim y)$	$[5,\ 6,\ R2]$
8.	$x \dashv\vdash x(y \vee \sim y)$	$[1,\ 7]$

Пусть $p^1, \ldots, p^n$ суть все элементарные высказывания, входящие в y и не входящие в x. Если $x(p^1 \vee \sim p^1) \ldots \ldots (p^n \vee \sim p^n) \vdash y$ есть тавтология, то она доказуема в S^s, а значит и в S^{*6}. Но $x \vdash x(p^1 \vee \sim p^1) \ldots (p^n \vee \sim p^n)$ доказуема в S^{*6} в силу теоремы 8. Следовательно, в силу R_1 доказуема $x \vdash y$.

Доказательство *МТ*2 и *МТ*3 изложено в работе Л. А. Бобровой [1].

ГЛАВА ПЯТАЯ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ДЕДУКЦИИ

§ 1. Общая теория дедукции

Рассмотренные выше системы образуют общую теорию дедукции. Прочие разделы логики будут строиться, как это и принято в современной логике, путем присоединения к ней новых элементов алфавита, определений, аксиомных схем и правил вывода.

§ 2. Общая теория дедукции и классическая логика

Интерпретация, приведенная выше для доказательства непротиворечивости и полноты систем общей теории дедукции, образует функционально полную двузначную пропозициональную алгебру. Причем, знак следования в ней интерпретировался как знак материальной импликации.

Отсюда в силу теорем полноты и непарадоксальности для систем общей теории дедукции и в силу дедуктивной эквивалентности классического пропорционального исчисления и двузначной алгебры получаем такие следствия (выражению «элементарное высказывание» при этом будет соответствовать выражение «пропозициональная переменная»):

*MT*1. Формула $x \vdash y$ доказуема в S^s, если и только если $x \supset y$ доказуема в классическом пропозициональном исчислении и при этом в y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x.

$MT2$. Формула $x \vdash y$ доказуема в S^m, если и только если $x \supset y$ доказуема в классическом пропозициональном исчислении и при этом в x и y входят одинаковые элементарные высказывания.

$MT3$. Формула $x \vdash y$ доказуема в S^w, если и только если $x \supset y$ доказуема в классическом пропозициональном исчислении и при этом в x и y входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание.

$MT4$. Формула $x \vdash y$ доказуема в S^c, если и только если $x \supset y$ доказуема в классическом пропозициональном исчислении и при этом в x не входят элементарные высказывания, отсутствующие в y.

$MT5$. Формула $\vdash x$ доказуема в S^5, если и только если x доказуема в классическом пропозициональном исчислении.

$MT6$. Формула $x \vdash y$ доказуема в S^6, если и только если $x \supset y$ доказуема в классическом пропозициональном исчислении.

Как видим, классическая логика сохраняется в общей теории дедукции в смысле $MT5$ и $MT6$.

В силу определений формулы следования выражения вида $(x \vdash (y \vdash x))$, $(x \vdash (\sim x \vdash y))$, $(x \vdash y)(y \vdash z) \vdash \vdash (x \vdash z)$ и т. п., содержащие по два или более знака следования, не являются формулами следования в системах общей теории дедукции. Так что не каждой правильно построенной формуле классического пропозиционального исчисления вида $x \supset y$ соответствует формула $x \vdash y$ в системах общей теории дедукции. С этой точки зрения даже система S^6 не совпадает с классическим пропозициональным исчислением. В силу теорем непарадоксальности в системах S^s, S^w, S^m и S^c недоказуемы формулы $x \vdash \sim(\sim yy)$, $\sim xx \vdash y$, $x \vdash y \vee \sim y$ и т. п., в которых посылка и заключение не содержат одинаковых элементарных высказываний. Тем самым наши системы исключают парадоксы, подобные парадоксам материальной импликации.

§ 3. «Парадоксы» следования

В системах S^s доказуемы формулы вида A: $x \vdash x : \sim x$, $x \vdash x \vee \sim x$, $\sim xx \vdash x$. Их иногда рассматривают как частный случай парадоксальных формул вида B: $x \vdash y : \sim y$, $x \vdash y \vee \sim y$, $\sim xx \vdash y$. Но что такое «частный случай формулы»? Неявно полагается, что формула a есть частный случай формулы b, если первая получается из второй подстановкой в элементарные высказывания, входящие во вторую. Однако, в S^s недоказуемы формулы вида B, и формулы вида A получаются не из них. И если формулы вида A не нравятся по каким-то соображениям, то эти соображения должны быть сформулированы независимо от формул B.

Разумеется, можно какие-то доказуемые в некоторой системе формулы отвергнуть по каким-то мотивам и строить более узкие исчисления. Однако, в этом случае придется просто перечислять исключаемые формулы или указывать их некоторые общие структурные признаки. Например, можно потребовать, чтобы были недоказуемы формулы вида $a \vdash a : x$, $a \vdash a : x^1 : \ldots : x^n$. Однако, во всех случаях такого рода нельзя сформулировать априорные требования, не зависящие от конкретной структуры формул. Отношения формул по длине здесь ничего не дают, а входить в конкретную структуру формул — значит отказаться от некоторого априорного (интуитивного) понятия логического следования, не зависящего от вида формул и исчислений, т. е. снять проблему вообще.

Формулы типа A — законная плата за дедуктивный метод и за полноту охвата формул определенного вида в том или ином исчислении.

§ 4. Общая теория дедукции и интуиционистская логика

В интуиционистском пропозициональном исчислении доказуемы формулы $x \supset (y \supset x)$, $x \supset (\sim x \supset y)$, $\sim xx \supset \supset y$, $y \supset x \vee \sim x$, порождающие парадоксы, аналогичные парадоксам материальной и строгой импликации. Но зато в нем недоказуемы формулы $\sim\sim x \supset x$ и $\sim x \vee \vee x$. Так что при интерпретации его в качестве системы общей теории дедукции получается система с бесмысленным на уровне общей теории дедукции ограничением. Это не означает, что интуиционистские ограничения классической логики вообще лишены смысла. В дальнейшем мы будем постоянно рассматривать неклассические случаи, соответствующие этим идеям. Это означает лишь то, что на уровне общей теории дедукции интерпретация интуиционистского пропозиционального исчисления как системы следования дает неполную систему, да к тому же с парадоксальными следствиями.

§ 5. Неклассический случай на уровне общей теории дедукции

Различение классических и неклассических случаев в рамках общей теории дедукции лишено смысла, поскольку операторы $\urcorner$ и ? могут стоять только перед операторами $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ и $\rightarrow$ (из тех, которые были указаны во введении). Перед операторами, рассматриваемыми в общей теории дедукции ($\cdot$, :, $\vee$, $\sim$), они не могут стоять в силу самих правил построения высказываний такого типа. Однако, мы все же сформулируем добавление к системам общей теории дедукции, благодаря которому полученные системы можно рассматривать как системы для неклассических случаев. Обозначим их символами S_n^s, S_n^w и т. д. в зависимости от выбора S^s, S^w и т. д., к которым делается это дополнение.

Дополнение к определению высказывания: если x есть высказывание с главным оператором $\forall$, $\exists$, $\leftarrow$ или $\rightarrow$, не содержащее $\urcorner$ и ?, то $\urcorner x$ и $?x$ суть высказывания, образованные из x путем помещения операторов соответственно $\urcorner$ и ? перед главным оператором x. Например, если x есть $a \leftarrow b$, то $\urcorner x$ есть $a \urcorner \leftarrow b$, а $?x$ есть $a? \leftarrow b$; если x есть $(\forall a)\ x$, то $\urcorner x$ есть $(\urcorner \forall a)\ x$, а $?x$ есть $(?\forall a)\ x$.

Дополнительные аксиомные схемы:

$A^n1.\ \sim x \vdash \urcorner x \vee ?x$

$A^n2.\ \urcorner x \vee ?x \vdash \sim x$

$A^n3.\ \sim \urcorner x \vdash x \vee ?x$

$A^n4.\ x \vee ?x \vdash \sim \urcorner x$

$A^n5.\ \sim ?x \vdash x \vee \urcorner x$

$A^n6.\ x \vee \urcorner x \vdash \sim ?x$

Главная семантическая интерпретация операторов $\urcorner$ и ?:

1) если одно их x и $\urcorner x$ имеет значение 1, то друго имеет значение 0;

2) если одно из x и $\urcorner x$ имеет значение 0, то значение другого не зависит от первого (не исключается случай, когда оба они имеют значение 0);

3) $?x$ равнозначно $\sim x \sim \urcorner x$.

*MT*1. Все доказуемые в S^i_n формулы суть тавтологии поскольку все $A^n_1 - A^n_6$ суть тавтологии).

*MT*2. Если $x \vdash y$ доказуема в S^s_n, то в y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x. Аналогично для S^w_n, S^m_n и S^c_n имеют силу соответствующие теоремы непарадоксальности. *MT*2 очевидна из вида $A^n_1 - A^n_6$.

Из *MT*1 следует:

*MT*3. Формулы $\sim \urcorner x \vdash x$ и $\vdash x \vee \urcorner x$ недоказуемы в S^i_n (поскольку не являются тавтологиями).

Недоказуемость формул $\sim \urcorner x \vdash x$ и $\vdash x \vee \urcorner x$ в S^i_n соответствует недоказуемости законов снятия двойного отрицания и исключенного третьего в интуиционистской логике.

Приведем некоторые интересные теоремные схемы S^i_n:

$T1.\ x \dashv\vdash \sim \neg x \sim ?x$

$T2.\ x \vdash \sim \neg x$

$T3.\ x \vdash \sim ?x$

$T4.\ \neg x \dashv\vdash \sim x \sim ?x$

$T5.\ \neg x \vdash \sim x$

$T6.\ \neg x \vdash \sim ?x$

$T7.\ ?x \dashv\vdash \sim x \sim \neg x$

$T8.\ ?x \vdash \sim x$

$T9.\ ?x \vdash \sim \neg x$

$T10.\ \vdash \sim (x \neg x)$

$T11.\ \vdash \sim (x\,?x)$

$T12.\ \vdash \sim (\neg x\,?x)$

$T13.\ \vdash \sim (x \neg x\,?x)$

$T14.\ \vdash x \vee \neg x \vee ?x$

Классический случай систем общей теории дедукции можно получить двумя путями: 1) просто исключить принятые в данном параграфе дополнения; 2) принять дополнительную аксиомную схему

$A^n7\ \sim x \vdash \neg x.$

Благодаря A^n7 будут доказуемы $\sim x \dashv\vdash \neg x$, $\sim \neg x \vdash x, \vdash x \vee \neg x, \vdash \sim ?x$ и другие формулы, делающие излишними оператор неопределенности и различение двух отрицаний.

§ 6. Классические и неклассические отношения высказываний

*D*1. Будем говорить, что $y^1, \ldots, y^m$ не расширяют числа возможностей по $x^1, \ldots, x^n$, если и только если доказуема формула $\vdash \sim (x^1 : \ldots : x^n : y^1 : \ldots : y^m)$ или формула $x^1 : \ldots : x^n : y^1 : \ldots : y^m \vdash x_1 : \ldots : x_k$, где $x_1, \ldots, x_k$ суть высказывания из множества высказываний $x^1, \ldots, x^n$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ или их отрицаний.

*MT*1. Если $y^1, \ldots, y^m$ $(m \geqslant 1)$ не расширяют числа возможностей по $x^1, \ldots, x^n$, то $y^1, \ldots, y^m, y^{m+1}$ точно также не расширяют числа возможностей по $x^1, \ldots, x^n$.

Справедливость $MT1$ видна из того, что если доказуема $x^1: \ldots :x^n:y^1: \ldots :y^m \vdash x_1: \ldots :x_k$, то либо доказуема $x^1: \ldots :x^n:y^1: \ldots :y^m:y^{m+1} \vdash x_1^1: \ldots :x_l^1$, где $1 \leqslant l \leqslant k$, а $x_1^1, \ldots, x_l^1$ суть какие-то из $x_1, \ldots, x_k$, либо доказуема $\vdash \sim (x^1: \ldots :x^n:y^1: \ldots :y^m:y^{m+1})$, и если доказуема $\vdash \sim (x^1: \ldots :x^n:y^1: \ldots :y^m)$, то доказуема и $\vdash \sim (x^1: \ldots :x^n:y^1: \ldots :y^m : y^{m+1})$.

$MT2$. Каждое из xy, $\sim xy$, $x \sim y$, x, y, $\sim x$, $\sim y$ не расширяет числа возможностей по x и y.

Теорема верна, поскольку в S^5 доказуемы формулы

$$
\begin{array}{ll}
x : y : xy \vdash x : y & x : y : y \vdash x \\
x : y : \sim xy \vdash x & x : y : \sim x \vdash \sim y \\
x : y : x \sim y \vdash y & x : y : \sim y \vdash \sim x \\
x : y : x \vdash y &
\end{array}
$$

$MT3$. Любая комбинация из xy, $\sim xy$, $x \sim y$, x, y, $\sim x$ и $\sim y$ не расширяет числа возможностей по x и y (следует из $MT1$ и $MT2$).

$MT4$. Высказывание $\sim x \sim y$ расширяет число возможностей по x и y.

Теорема верна, поскольку в S^5 недоказуемы формулы

$$
\begin{array}{ll}
x : y : \sim x \sim y \vdash x : y, & x : y : \sim x \sim y \vdash y \\
x : y : \sim x \sim y \vdash x, & \vdash \sim (x : y : \sim x \sim y)
\end{array}
$$

$MT5$. Любая конъюнкция z из x, y и их отрицаний не расширяет числа возможностей по x, y и $\sim x \sim y$.

Доказательство $MT5$. Пусть z есть $\sim x \sim y$. В S^5 доказуема $x:y: \sim x \sim y: \sim x \sim y \vdash x : y$. Пусть z отлично от $\sim x \sim y$. В таком случае $MT5$ верна в силу $MT3$ и $MT1$.

$MT6$. Любая конъюнкция z из x, y, $\sim x \sim y$ и из отрицаний не расширяет числа возможностей по x, y и $\sim x \sim y$.

Теорема $MT6$ есть следствие $MT5$.

Из $MT5$ и $MT6$ следует, что $\sim x \sim y$ есть единственное расширение возможностей по x и y и предельное (дальнейшее расширение исключено).

$MT7$. Расширение числа возможностей по x и $\sim x$ невозможно.

$MT8$. Высказывание $\sim x \sim \neg x$ является единственным расширением числа возможностей по x и $\neg x$.

$D2$. Будем говорить, что высказывания x и y находятся в классическом отношении, если и только если доказуема $\vdash x{:}y$.

$D3$. Будем говорить, что высказывания x и y находятся в неклассическом отношении, если и только если доказуема $\vdash x : y : \sim x \sim y$, но недоказуема $\vdash x{:}y$.

$MT9$. Высказывания x и $\sim x$ находятся в классическом отношении, а высказывания x и $\neg x$ — в неклассическом.

$MT10$. Классическому отношению высказываний соответствует одно и только одно неклассическое.

Таким образом, рассматриваемые нами неклассические случаи систем следования являются единственно возможными.

§ 7. Расширение общей теории дедукции

В дальнейшем мы будем излагать только те дополнения, которые должны быть сделаны к общей теории дедукции, чтобы получить соответствующий раздел логики (подобно тому, как это сделано в § 5). В зависимости от того, какая система общей теории дедукции будет выбрана, получатся различные системы и варианты систем данного раздела логики.

§ 8. К семантической интерпретации знака следования

Знак следования в формулах $x \vdash y$ мы выше семантически интерпретировали так, что выполнялось утверждение: $x \vdash y$ есть тавтология, если и только если $x \supset y$

есть тавтология. Это было сделано исключительно из «технических» соображений и для удобства сравнения наших логических систем с традиционными системами классической математической логики, а не как определение условий истинности высказываний о следовании.

Для наших целей была бы вполне достаточна такая интерпретация знака следования: $x \vdash y$ имеет значение 1, если и только если приписав x значение 1 (y значение 0), мы вследствие этого вынуждены приписать y значение 1 (x значение 0). Однако и эта интерпретация не есть определение условий истинности $x \vdash y$. Последние определяются так: высказывание «Из x следует y» истинно, если и только если действительно имеется логическое правило (утверждение), согласно которому из x следует y. А так как в логике приходится устанавливать сами эти правила, то семантическая интерпретация знака следования может быть лишь «техническим» подсобным средством решения этой задачи, и не более того. Подробно вопрос о семантической стороне дела в проблеме следования рассмотрен в работах [3, 8].

§ 9. К полноте логических систем

Мы выше определили полноту систем общей теории дедукции относительно определенных классов формул $x \vdash y$ (эти формулы суть тавтологии в принятой интерпретации и удовлетворяют определенному ограничению на соотношения элементарных высказываний, входящих в x и y). Однако эта полнота является в некотором роде избыточной: в наших системах доказуемые некоторые формулы, которые бесполезны с точки зрения использования правил следования (таковы, например, формулы, указанные в § 3). Поэтому полезно сформулировать другое (более узкое) понятие полноты, подобно тому, как это сделано Е. А. Сидоренко (см. § 6 третьей главы).

Введем следующую операцию замены отрицаний высказываний. Если в $x \vdash y$ высказывание x есть противоречие или y есть тавтология (или и то и другое), то из $x \vdash y$ получается формула $x^* \vdash y^*$ следующим образом:

1) все вхождения вида $a^1 : \ldots : a^n$ в $x \vdash y$ заменяются на $b^1 : \ldots : b^n$, где каждое b^i $(i = 1, \ldots, n)$ есть конъюнкция a^i и отрицаний всех остальных из $a^1, \ldots, a^n$;

2) все вхождения вида $\sim \sim c$ заменяются на c до тех пор, пока не останется высказывание без отрицания вообще или только с одним отрицанием;

3) если в полученной формуле $x^* \vdash y^*$ в x^* или в y^* входит z без отрицания и с отрицанием, то $\sim z$ везде заменяется на высказывание v, которое не входит в $x^* \vdash y^*$;

4) сказанное в пункте 3 делается для всех пар высказываний и их отрицаний, входящих в x^* или y^*; полученная формула есть $x^{**} \vdash y^{**}$.

Системы общей теории дедукции можно считать достаточно полными, если в них доказуемы все непарадоксальные тавтологии $x \vdash y$ такие, что формулы $x^{**} \vdash y^{**}$, полученные в результате рассмотренной операции замены отрицаний высказываний, доказуемы в соответствующих системах. С этой точки зрения система S_2^1 не является полной, поскольку в ней недоказуема формула $(x \vee y) \cdot \sim x \vdash y$, к которой наша операция замены неприменима (ибо $(x \vee y) \sim x$ не есть противоречие, а y не есть тавтология).

Благодаря приведенной операции замены рассматриваются только такие $x \vdash y$, в которых x может принять значение 1, а y — значение 0. Так что приведенная в § 8 интерпретация оказывается вполне достаточной.

Мы не настаиваем на таком сужении наших систем, чтобы в них были доказуемы только формулы, отвечающие третьему условию (т. е. чтобы в них не были доказуемы формулы, не отвечающие третьему условию), хотя и не исключаем его. Если та или иная система полна в таком более узком смысле, то она дает исчерпывающее определение операторов, рассматриваемых в данном разделе логики.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

УСЛОВНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

§ 1. Условные высказывания

Системы, образующие теорию условных высказываний получаются благодаря таким дополнениям к системам общей теории дедукции.

Дополнение к алфавиту:

1) $\rightarrow$ — высказываниеобразующий оператор «если, то» (оператор условности);

2) $\urcorner$ — внутреннее отрицание;

3) ? — оператор неопределенности.

*D*1. Дополнение к определению высказывания $(x \rightarrow y)$, $(x \urcorner \rightarrow y)$ и $(x? \rightarrow y)$ суть высказывания, если и только если x и y суть высказывания.

*D*2. Высказывания x и y суть соответственно антецедент и консеквент высказываний $(x \rightarrow y)$, $(x \urcorner \rightarrow y)$ и $(x? \rightarrow y)$.

*D*2. Элементарное высказывание в теории условных высказываний:

1) если оператор условности не входит в высказывания x и y, то эти высказывания суть элементарные высказывания, входящие в $(x \rightarrow y)$, $(x \urcorner \rightarrow y)$, $(x? \rightarrow y)$;

2) если $(x \rightarrow y)$, $(x \urcorner \rightarrow y)$ или $(x? \rightarrow y)$ входит в z, то элементарные высказывания, входящие в x и y, суть элементарные высказывания, входящие в z;

3) высказывание элементарно лишь в силу 1 и 2.

Дополнительные аксиомные схемы и правила вывода укажем ниже. Системы теории условных высказываний рассматривались в [3—5].

§ 2. Условные высказывания и следование

Высказывания «Если x, то y» обычно смешивают с высказываниями «Из x следует y». Это смешение — грубая ошибка: высказывание «Если x, то y» состоит из высказываний x и y и высказываниеобразующего оператора, тогда как высказывание «Из x следует y» состоит из субъектов «высказывание x» и «высказывание y» и предиката «из первого следует второе».

Имеется еще одно принципиальное их различие. Вопрос о том, когда истинны высказывания вида «Из x следует y» есть вопрос, решаемый в рамках логики и только логики. Установление этого есть главная задача логики. Тогда как вопрос о том, когда истинны высказывания вида «Если x, то y», лишь частично решается в логике, да и то как производный от первого, т. е. лишь в силу принципа: если верно, что из x следует y, то верно «Если x, то y». В остальных случаях, когда высказывания «Если x, то y» получаются не из отношений следования, логика совершенно не компетентна судить об их истинности. И не во всех случаях, когда истинно «Если x, то y» будет истинно «Из x следует y».

Известны многочисленные случаи, когда условное высказывание является истинным, а антецедент и консеквент его не содержат никаких одинаковых терминов и высказываний.

§ 3. Условные высказывания и материальная импликация

Оператор условности обычно отождествляют с оператором материальной импликации. Это отождествление точно так же ошибочно, на что указывали многие логики (в частности, Айдукевич). Этот вопрос рассматривался в [3, 8]. Добавим еще несколько примеров, наглядно иллюстрирующих ошибочность такого отождествления.

Для оператора материальной импликации имеют силу утверждения:

$$xy \vdash (x \supset y), \qquad \sim x \sim y \vdash (x \supset y), \qquad \sim xy \vdash (x \supset y)$$
$$\sim (x \sim y) \vdash (x \supset y), \quad \sim (x \supset y) \vdash x \sim y, \quad \sim x \vee y \vdash (x \supset y).$$

Эти утверждения суть тавтологии и в силу полноты S^s доказуемы в ней. Но аналогичные утверждения для оператора условности

$$xy \vdash (x \rightarrow y), \qquad \sim x \sim y \vdash (x \rightarrow y), \qquad \sim xy \vdash (x \rightarrow y)$$
$$\sim (x \sim y) \vdash (x \rightarrow y), \quad \sim (x \rightarrow y) \vdash x \sim y, \quad \sim x \vee y \vdash (x \rightarrow y)$$

ошибочны. Если мы в какой-то ситуации установили истинность x и y, это еще не дает нам права принимать за истинное y всякий раз, когда истинно x (т. е. это не исключает ситуации, когда истинны x и $\sim y$). Аналогично для случаев $\sim x \sim y$, $\sim xy$, $\sim (x \sim y)$ и $\sim x \vee y$. Отрицание $x \rightarrow y$ означает, что признание x не дает нам права на признание y. Но из отрицания этого права не следует, что неверно $x \sim y$.

Для материальной импликации верно утверждение

$$(xy \supset z \vee v) \vdash (x \supset z) \vee (y \supset v),$$

являющееся тавтологией и доказуемое в S^s. Но аналогичное утверждение для оператора условности

$$(xy \rightarrow z \vee v) \vdash (x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow v)$$

ошибочно: возможно верно $xy \rightarrow z$ или $xy \rightarrow v$, но неверны оба $x \rightarrow z$ и $y \rightarrow v$. В частности, для наступления событий, фиксируемых в z и v, нужны оба события, фиксируемые в x и y, а по отдельности они для этого недостаточны. Или возможно, что z и v следуют только из xy, а из x и y по отдельности нет. Так, в S^s доказуемо $xy \vdash y \vee x$, и значит истинно $xy \rightarrow y \vee x$; но в S^s недоказуемы $x \vdash y$ и $y \vdash x$, т. е. оба $x \rightarrow y$ и $y \rightarrow x$ могут оказаться ложными.

Для материальной импликации верно утверждение

$$(xy \supset z) \vdash (x \supset z) \vee (y \supset z),$$

являющееся тавтологией и доказуемое в S^s. Аналогичное утверждение для условных высказываний

$$(xy \to z) \vdash (x \to z) \vee (y \to z)$$

ошибочно: например, высказывание $xy \to xy$ истинно, а $x \to xy$ и $y \to xy$ могут быть ложными. И такого рода примеры можно приводить сколько угодно.

Отождествление $x \to y$ и $x \supset y$ явилось следствием того (если не принимать во внимание увлечение идеями и другие социально-психологические обстоятельства), что в математике, для которой в основном и разрабатывалась математическая логика, антецеденты и консеквенты условных высказываний универсальны, т. е. не изменяют значений истинности в зависимости от условий, места и времени. Кроме того, в математике условные высказывания принимаются исключительно из отношений следования, и приведение примеров такого рода, как выше, априори исключается. Короче говоря, при этом из класса условных высказываний выделяются только такие, которые в силу самой априорной установки (способа выбора) можно рассматривать как материальные импликации. Но употребляемые в науке (и вне ее) условные высказывания часто содержат антецеденты и консеквенты, значения истинности которых зависят от условий, места и времени. И получаются эти высказывания не из отношений следования, а из наблюдений и экспериментов или просто постулируются ради каких-то целей (например, для того, чтобы можно было логически вывести какие-то иные высказывания).

Мы не отвергаем сходства $x \to y$ и $x \supset y$. В частности, для них имеют силу сходные утверждения

$(x \supset y)\, x \vdash y$, $\quad (x \to y)\, x \vdash y$

$(x \supset y) \sim y \vdash \sim x$, $\quad (x \to y) \sim y \vdash \sim x$

$(x \supset y) \vdash (\sim y \supset \sim x)$, $\quad (x \to y) \vdash (\sim y \to \sim x)$

$\vdash (xy \supset \sim (x \supset \sim y))$, $\quad \vdash (xy \to \sim (x \to \sim y))$

и т. п. Кроме того, между ними имеет место логическая связь, устанавливаемая утверждениями

$$\vdash (x \to y) \to (x \supset y)$$

$$\vdash \sim (x \supset y) \to \sim (x \to y).$$

Однако, это не отвергает следующее принципиально важное утверждение: не всякому приемлемому утверждению $x \vdash y$, содержащему оператор $\supset$, соответствует приемлемое утверждение $z \vdash v$, получающееся из $x \vdash y$ путем замены оператора $\supset$ на оператор $\to$ по крайней мере в одном месте. Это — априорная предпосылка построения теории условных высказываний.

§ 4. Интерпретация

Отступим от принятого выше порядка изложения и сформулируем сначала семантическую интерпретацию высказываний с оператором условности.

Условным высказываниям значения приписываются по таким правилам:

1) если приписали $x \to y$ значение 1 и при этом приписали x значение 1, то должны приписать y значение 1;

2) если приписали $x \to y$ значение 1 и при этом приписали y значение 0, то должны приписать x значение 0;

3) если приписали $x \to y$ значение 0 и при этом приписали x значение 1, то значение y не зависит от значения x, т. е. имеем право приписать y как значение 1, так и значение 0 (если значение y уже не задано), и оба случая должны быть рассмотрены;

4) если приписали $x \to y$ значение 0 и при этом приписали y значение 0, то значение x не зависит от значения y;

5) если приписали x значение 1 и вследствие этого вынуждены приписать y значение 1, то должны приписать $x \to y$ значение 1;

6) если приписали y значение 0 и вследствие этого вынуждены приписать x значение 0, то должны приписать $x \to y$ значение 1;

7) если приписали x значение 1, и это не обязывает нас приписывать y значение 1 (т. е. мы можем при этом приписать y значение 1 и 0), то можем приписать $x \to y$ значение 0;

8) если приписали y значение 0, и это не обязывает нас приписывать x значение 0, то можем $x \to y$ приписать значение 0;

9) если x приписали значение 0 (или y приписали значение 1), то значение $x \to y$ не зависит от значения x (и, соответственно, y);

10) если одно из $x \to y$ и $x \urcorner \to y$ имеет значение 1, то другое имеет значение 0;

11) если одно из $x \to y$ и $x \urcorner \to y$ имеет значение 0, то значение другого не зависит от значения первого (т. е. другое может принять как значение 1, так и значение 0):

12) $x? \to y$ равнозначно $\sim (x \to y) \sim (x \urcorner \to y)$.

Рассмотрим несколько примеров использования приведенных семантических правил. Возьмем формулу $z \vdash \vdash (x \to z)$. Приписав z значение 1, мы тем самым не определяем значение $x \to z$: последнее при этом может иметь значение 0 согласно пункту 9; кроме того, здесь z получает значение 1 не вследствие того, что x приписано значение 1. В высказывании же $xy \to x$ консеквент принимает значение 1, если антецедент принимает значение 1, и это высказывание согласно пункту 5 имеет значение 1. В формуле $(x \to y)\ (y \to z) \vdash (x \to z)$ мы, приписав $(x \to y)$, $(y \to z)$ и x значение 1, вынуждены приписать и z значение 1, так что должны и $x \to z$ приписать значение 1.

Можно показать, что приведенные во втором параграфе неприемлемые формулы с условными высказываниями не являются тавтологиями. Так, припишем в формуле $(xy \to z) \vdash (x \to z) \vee (y \to z)$ высказыванию $xy \to z$ значение 1. Согласно пункту 2 мы должны приписать xy значение 0, приписав z значение 0. Но, приписав z значение 0, мы не обязаны вследствие этого приписывать x значение 0, так как xy может иметь значение 0 за счет того, что значение 0 имеет y. Потому $x \rightarrow z$ можем приписать значение 0. Аналогичное рассуждение имеет силу для $y \rightarrow z$. Так что $(x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)$ может иметь значение 0 в то время, как $(xy \rightarrow z)$ имеет значение 1.

Аналогично обстоит дело с формулой $(x \rightarrow y \vee z) \vdash \vdash (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$, которая на первый взгляд кажется приемлемой. Приписав x и $x \rightarrow y \vee z$ значение 1, мы должны приписать $y \vee z$ значение 1. Но это не означает, что мы непременно y должны приписать значение 1. Потому $x \rightarrow y$ может иметь значение 0. Это также не означает, что мы должны непременно z приписать значение 1. Потому $x \rightarrow z$ может иметь значение 0. Значит данная формула не есть тавтология. Это соответствует тому, что оба $x \rightarrow y$ и $x \rightarrow z$ могут быть ложными, а $x \rightarrow y \vee z$ при этом может быть истинным. В частности, если x, то какая-то из возможностей y и z непременно реализуется. Но какая именно, по x судить невозможно. Для материальной импликации формула, аналогичная рассматриваемой, есть тавтология.

Принятая интерпретация условной импликации отличается от табличного определения материальной импликации. В самом деле, $x \rightarrow y$ может иметь значение 0 в случаях, когда x имеет значение 1 и y имеет значение 1, а также в случаях, когда x имеет значение 0 и y имеет значение 1. Единственное, в чем они сходны, если рассматривать исключительно зависимость значения $x \rightarrow y$ от значений x и y, это случай, когда x имеет значение 1, а y — значение 0. В этом случае $x \rightarrow y$ принимает значение 0.

Таким образом, не всякому $x \supset y$, имеющему значение 1, соответствует $x \rightarrow y$, имеющее значение 1. Другими словами, из этого, что $x \supset y$ истинно (имеет значение 1), не следует, что $x \rightarrow y$ истинно (имеет значение 1). Но если истинно $x \rightarrow y$, то истинно $x \supset y$.

§ 5. Классический и неклассический случаи

Системы для неклассического случая содержат следующие аксиомные схемы:

$A^n 1.\ (x \rightarrow y) \vdash \sim (x \urcorner \rightarrow y) \sim (x? \rightarrow y)$

$A^n 2.\ \sim (x \urcorner \rightarrow y) \sim (x? \rightarrow y) \vdash (x \rightarrow y)$

$A^n 3.\ (x \urcorner \rightarrow y) \vdash \sim (x \rightarrow y) \sim (x? \rightarrow y)$

$A^n 4.\ \sim (x \rightarrow y) \sim (x? \rightarrow y) \vdash (x \urcorner \rightarrow y)$

$A^n 5.\ (x? \rightarrow y) \vdash \sim (x \rightarrow y) \sim (x \urcorner \rightarrow y)$

$A^n 6.\ \sim (x \rightarrow y) \sim (x \urcorner \rightarrow y) \vdash (x? \rightarrow y)$

Системы для классического случая получаются либо путем исключения $A^n 1 - A^n 6$, исключения из алфавита операторов внутреннего отрицания и неопределенности и исключения из $D1$—$D3$ первого параграфа символов с этими операторами, либо путем принятия дополнительной аксиомной схемы:

$A^n 7.\ \sim (x \rightarrow y) \vdash (x \urcorner \rightarrow y)$

*MT*1. В системе, полученной за счет присоединения $A^n 1 - A^n 7$ к S^5, будет доказуема формула $\vdash\ \sim (x? \rightarrow y)$. В этой системе будет доказуема также $\sim (x \urcorner \rightarrow y) \vdash$ $\vdash (x \rightarrow y)$.

*MT*2. Легко убедиться, что все формулы, указанные в $A^n 1 - A^n 6$, суть тавтологии и непарадоксальны в том смысле, что множества элементарных высказываний, входящих в посылки и заключения, совпадают.

*MT*3. Формулы $\sim (x \urcorner \rightarrow y) \vdash (x \rightarrow y)$ тавтологией не является и потому недоказуема в системах, полученных путем добавления к системам общей теории дедукции аксиомных схем $A^n 1 - A^n 6$. Аналогично не является тавтологией (а значит недоказуема) $\sim (x \rightarrow y) \vdash (x \urcorner \rightarrow y)$.

Другой вариант систем неклассической логики, эквивалентный изложенному выше, получится, если вместо $A^n 5$ и $A^n 6$ принять $D^* 1$, вместо $A^n 1 - A^n 4$ принять аксиомные схемы A^*1 — A^*4, из алфавита и определений исключить оператор неопределенности и все символы, содержащие его.

D^*1. $(x? \to y)$ есть сокращения для $\sim (x \to y) \sim (x \urcorner \to y)$.

A^*1. $\sim (x \to y) \vdash (x \urcorner \to y) \vee \sim (x \to y) \sim (x \urcorner \to y)$

A^*2. $(x \urcorner \to y) \vdash \sim (x \to y)$

A^*3. $\sim (x \urcorner \to y) \vdash (x \to y) \vee \sim (x \to y) \sim (x \urcorner \mapsto y)$

A^*4. $(x \to y) \vdash \sim (x \urcorner \to y)$

§ 6. Система S^s_{if}

Дополнительные аксиомные схемы:

$A1$. $(x \to y)\, x \vdash y$

$A2$. $(x \to y) \vdash (\sim y \to \sim x)$

$A3$. $(x \to y)\,(y \to z) \vdash (x \to z)$

$A4$. $(x \to yz) \vdash (x \to y)\,(x \to z)$

$A5$. $(xy \to z) \vdash (x \to (y \to z)$

$A6$. $(x \to (y \to z)) \vdash (xy \to z)$

$A7$. $(x \to y)\,(z \to v) \vdash (xz \to yv)$

$A8$. $(x \to y) \vee (z \to v) \vdash (xz \to y \vee v)$

$MT1$. Все доказуемые в S^s_{if} формулы суть тавтологии (теорема легко доказывается путем перебора всех аксиомных схем $A1$ — $A8$).

$MT2$. Если $x \vdash y$ доказуема в S^s_{if}, то в y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x (теорема верна, поскольку $A1$ — $A8$ явно ей удовлетворяют).

$MT3$. Если $x \vdash y$ доказуема в S^s_{if} и в y входит оператор условности, то он входит и в x (теорема очевидна из вида $A1$ — $A9$).

Согласно $MT3$ в S^s_{if} не может быть доказуема формула вида $x \vdash (y \to z)$, в которой в x отсутствует оператор условности.

Приведем некоторые теоремные схемы (в квадратных скобках укажем лишь аксиомные и теоремные схемы S^s_{if}, позволяющие получить данную теоремную схему).

$T1$. $(x \to y)(yz \to v) \vdash (xz \to v)$ [$A5$, $A3$, $A6$]

$T2$. $(x \to y \vee z)(z \to v) \vdash (x \to y \vee v)$ [$A2$, $T1$, $A2$]

$T3$. $(x \vee y \to z)(v \to x) \vdash (v \vee y \to z)$ [$A2$, $A4$, $A3$, $A7$, $A2$]

$T4$. $(x \to y) \sim y \vdash \sim x$ [$A2$, $A1$]

$T5$. $(x \to y \vee z) \sim y \vdash (x \to z)$ [$A2$, $A5$, $A1$, $A2$]

$T6$. $(xy \to z)\, x \vdash (y \to z)$ [$A5$, $A1$]

$T7$. $(x \vee y \to z) \vdash (x \to z)(y \to z)$ [$A2$, $A4$, $A2$]

$T8$. $(x \to z)(y \to z) \vdash (x \vee y \to z)$ [$A2$, $A7$, $A2$]

$T9$. $(x \to y \vee z) \vdash (\sim y \to (x \to z))$ [$A2$, $A5$, $A3$, $A2$]

$T10$. $(\sim y \to (x \to z)) \vdash (x \to (y \vee z))$ [$A2$, $A6$, $A2$]

$T11$. $(x \to y)(v \to z) \vdash (x \vee v \to y \vee z)$ [$A2$, $A7$, $A2$]

§ 7. Система S^w_{if}

Система S^w_{if} образуется путем дополнения к S^s_{if} аксиомной схемы

$A9$. $(x \to y) \vdash (xz \to y)$.

MT1. Если $x \vdash y$ доказуема в S^w_{if}, то в x и y входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание (теорема очевидна из вида $A9$).

MT2. Если $x \vdash y$ доказуема в S^w_{if}, что она есть тавтология (поскольку $A9$ есть, очевидно, тавтология).

$T1$. $(x \to y) \vdash (x \to y \vee z)$ [$A2$, $A9$, $A2$]

§ 8. Система S^5_{if}

Система S^5_{if} получается путем добавления к S^s_{if} правила:

$R1$. Если $x \vdash y$, то $\vdash (x \to y)$.

$MT1$. Если $\vdash (x \to y)$ доказуема, то она есть тавтология (очевидно в силу $R1$).

$MT2$. Если $\vdash (x \to y)$ доказуема, то $x \supset y$ есть тавтология.

$MT3$. Если $\vdash (x \to y)$ и $\vdash x$ доказуемы, то $\vdash y$ доказуемо.

Доказательство $MT3$: $(x \to y)\, x \vdash y$ доказуема; в силу $R1$ доказуема $\vdash ((x \to y)\, x \to y)$; доказуема $((x \to y)\, x \to y)\, ((x \to y)\, x) \vdash y$; по условию доказуемы $\vdash (x \to y)$ и $\vdash x$; значит доказуемо $\vdash ((x \to y)\, x \to y)\, (x \to y)\, x$; отсюда получаем, что доказуемо $\vdash y$.

$MT4$. Если $\vdash (x \to y)$ и $\vdash \sim y$ доказуемы, то доказуемо $\vdash \sim x$. Доказательство аналогично. Дополняется лишь то, что согласно $A2$ системы S^{s}_{if} доказуема $\vdash (\sim y \to \sim x)$.

Некоторые теоремные схемы:

$T1.\ \vdash ((x \to y) \to (xz \to y))$

$T2.\ \vdash (x \sim y \to \sim (x \to y))$

$T3.\ \vdash ((x \to y) \to \sim (x \sim y))$

$T4.\ \vdash ((xy \to z)\, (x \overset{\cdot}{\sim} y \leftrightarrow z) \to (x \to z))$

$T5.\ \vdash (y \to \sim x \vee x)$

$T6.\ \vdash (\sim yy \to x)$

$T7.\ \vdash (x \to (y \to x))$

$T8.\ \vdash (x \to (\sim x \to y))$

$T9.\ \vdash ((x : y) \to (x \to \sim y)\, (\sim x \to y))$

$T10.\ \vdash ((x \to \sim y)\, (\sim x \to y) \to (x : y))$

$T11.\ \vdash ((x \vee y) \to (\sim x \to y)\, (\sim y \to x))$

$T12.\ \vdash ((\sim x \to y) \to (x \vee y))$

$T13.\ \vdash (x \to x \vee y)$

$T14.\ \vdash ((x \to y)\, (x \to \sim y) \to \sim x)$

$T15.\ \vdash (x \to y)\, (y \to z) \to (x \to z)$

$MT5$. Если $\vdash (x \supset y)$ доказуема в S^5, то $\vdash (x \to y)$ доказуема в S^5_{if}.

Доказательство $MT5$. Для каждой аксиомной схемы $x \vdash y$ системы S^s в S^5_{if} доказуема $\vdash (x \rightarrow y)$. Поскольку в S^5_{if} верна $T13$, то каждой аксиомной схеме $x \vdash y$ системы S^w будет соответствовать доказуемая в S^5_{if} формула $\vdash (x \rightarrow y)$. А так как в S^5_{if} доказуема формула $T15$, соответствующая правилу транзитивности системы S^w без ограничения, то (в силу эквивалентности S^w с правилом транзитивности без ограничения классическому исчислению высказываний) наша теорема верна.

$MT6$. Если x и y суть высказывания в S^5 и если $\vdash (x \rightarrow y)$ доказуема в S^5_{if}, то $\vdash (x \supset y)$ доказуема в S^5 (теорема верна в силу $R1$ и $MT115$).

$MT7$. Если $\vdash x$ доказуема в S^5_{if}, то в S^5 доказуема $\vdash y$, где y образуется из x путем замены всех вхождений оператора условности на оператор материальной импликации.

Однако утверждение «Если в S^5_{if} доказуема $\vdash (x \rightarrow y)$, то в S^5 доказуема $\vdash (x \supset y)$» неверно. Например, в S^5_{if} доказуема $\vdash (x \rightarrow y)\,(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$, тогда как в S^5 $\vdash (x \rightarrow y)\,(y \rightarrow z) \supset (x \rightarrow z)$ недоказуема. Неверно также утверждение, обратное $MT7$. Например, $\vdash ((xy \supset z \vee v) \supset ((x \supset z) \vee (y \supset v)))$ доказуема в S^5, но $\vdash((xy \rightarrow z \vee v) \rightarrow ((x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)))$, конечно, недоказуема в S^{5*}_{if}.

§ 9. Система S^{5*}_{if}

Система S^{5*}_{if} получается путем присоединения к S^5 аксиомных схем $A1$ — $A3$ и правила $R1$:

$A1$. $(x \rightarrow y)\,x \vdash y$

$A2$. $(x \rightarrow y) \sim y \vdash \sim x$

$A3$. $\vdash ((xy \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)))$

$R1$. Если $x \vdash y$, то $\vdash (x \rightarrow y)$.

В S_{if}^{5*} имеют силу теоремные схемы:

$T1.\ \vdash ((x \to y)\, x \to y)$

$T2.\ \vdash ((x \to y) \to (\sim y \to \sim x))$

$T3.\ \vdash ((x \to yz) \to (x \to y)(x \to z))$

$T4.\ \vdash ((xy \to z) \to (x \to (y \to z)))$

$T5.\ \vdash ((x \to (y \to z)) \to (xy \to z))$

$T6.\ \vdash ((x \to y)(z \to v) \to (xz \to yv))$

$T7.\ \vdash ((x \to y) \vee (z \to v) \to (xz \to y \vee v))$

$T8.\ \vdash ((x \to y)(y \to z) \to (x \to z))$

*MT*1. Если $\vdash (x \to y)$ доказуема в S_{if}^{5}, то она доказуема в S_{if}^{5*}; и наоборот (теорема верна, поскольку в S_{if}^{5*} имеют силу $T1$ — $T8$, а в S_{if}^{5} доказуемы $A1$ и $A3$).

§ 10. Парадоксы S_{if}^{i}

Очевидно, что для $\vdash (x \to y)$ имеют силу «парадоксы», подобные парадоксам материальной и строгой импликации, поскольку доказуемы формулы $\vdash (x \to (y \to x))$, $\vdash (x \to (\sim x \to y))$, $\vdash (x \to y \vee \sim y)$, $\vdash (\sim yy \to x)$. Чтобы избежать их, необходимо из доказуемых формул исключить формулы вида

$$(xy \to z) \vdash (x \to (y \to z)$$

$$\vdash ((xy \to z) \to (x \to (y \to z))$$

(при сохранении остальных элементов систем S_{if}^{i}), или внести другие ограничения. Но это принципиально ничего не меняет.

В самом деле, интуитивно несомненно, что если $xy \to z$ и при этом y истинно, то $x \to z$. Так что исключив упомянутые парадоксы из логической системы, мы не в состоянии будем исключить их из ситуаций, в которых правила этой системы будут использоваться.

Для исключения указанных формул достаточно аксиомную схему $A5$ системы S_{if}^{5} заменить на аксиомную схему A^*5, а аксиомную схему $A3$ системы S_{if}^{5*} заменить на аксиомную схему A^*3:

$$A^*5.\ (xy \to z) \vdash (x \to (y \to z)),$$

где $\vdash (x \to z)$ и $\vdash (y \to z)$ недоказуемы в S_{if}^{5}.

$$A^*3.\ \vdash ((xy \to z) \to (x \to (y \to z))),$$

где $\vdash (x \to z)$ и $\vdash (y \to z)$ недоказуемы в S_{if}^{5*}.

Можно также аксиомным схемам A^*5 и A^*3 придать такой вид:

$$A^*5.\ (xy \to z) \sim (x \to z) \sim (y \to z) \vdash (x \to (y \to z))$$

$$A^*3.\ \vdash ((xy \to z) \sim (x \to z) \sim (y \to z) \to (x \to (y \to z))).$$

Для систем с приведенным ограничением неверна теорема, аналогичная теореме $MT5$ для S_{if}^{5}. Все доказуемые в них формулы $\vdash (x \to y)$ непарадоксальны в том же смысле, что и формулы систем общей теории дедукции.

§ 11. Полнота

Проблема полноты для формул вида $\vdash (x \to y)$ решается метатеоремами, сформулированными выше.

Те критерии полноты, которые мы применяли к системам общей теории дедукции для формул вида $x \vdash y$, недостаточны для теорий условных высказываний вот по какой причине. Возьмем формулу $(xy \to z) \vdash (xy \to y)$. В ней высказывание $xy \to y$ всегда имеет значение 1, так что эта формула есть тавтология. Причем, она удовлетворяет требованию непарадоксальности в следующем смысле: в заключение не входят элементарные высказывания, отсутствующие в посылке. Однако такая формула в качестве правила следования неприемлема: если верно $xy \to z$, из этого не следует, что будет верно высказывание, в котором вместо z стоит другой консеквент. И то, что $xy \to y$ истинно, есть частный случай, в котором истинность заключения установлена не путем логического следования его из $xy \to z$. Неприемлемы также в качестве правил следования формулы вида $(xy \to \sim x \sim y) \vdash (y \to x)$, $(z \to x \sim z) \vdash (x \to z)$ и т. п., которые являются тавтологиями и непарадоксальны в упомянутом смысле. Поэтому мы при построении систем теории условных высказываний ориентировались на более узкое понятие полноты.

Логическая теория строится с таким расчетом, чтобы дать исчерпывающий перечень правил оперирования данными логическими операторами. И если мы такой перечень нашли, это еще не означает, что свойства этих операторов вообще исчерпаны. Возможно введение нового оператора, и для комбинаций его с данными операторами потребуется новый перечень правил и т. д. Мы уже рассмотрели операторы, правила для которых образуют общую теорию дедукции. И вопрос о полноте теории условных высказываний может быть здесь решен лишь для комбинаций этих операторов и оператора условности. Определим для этой цели базисную формулу следования.

*D*1. Формула $x \vdash y$ является базисной формулой теории условных высказываний, если и только если она имеет такой вид:

1. $(a \to b)\, c \vdash d$
2. $(a \to b)(c \to d) \vdash (e \leftrightarrow f)$
3. $(a \to b)(c \to d) \vdash (ac \to bd)$
4. $(a \to b)(c \to d) \vdash (a \vee c \to bd)$
5. $(a \to b)(c \to d) \vdash (ac \to b \vee d)$
6. $(a \to b)(c \to d) \vdash (a \vee c \to b \vee d)$
7. $(a \to b) \vee (c \to d) \vdash (ac \to bd)$
8. $(a \to b) \vee (c \to d) \vdash (a \vee c \to bd)$
9. $(a \to b) \vee (c \to d) \vdash (ac \to b \vee d)$
10. $(a \to b) \vee (c \to d) \vdash (a \vee c \to b \vee d)$
11. $(ab \to c) \vdash z$
12. $(a \to bc) \vdash z$
13. $(a \vee b \to c) \vdash z$
14. $(a \to b \vee c) \vdash z$
15. $(ab \to cd) \vdash z$
16. $(ab \to c \vee d) \vdash z$
17. $(a \vee b \to cd) \vdash z$
18. $(a \vee b \to c \vee d) \vdash z$,

где a, b, c, d, e, f суть элементарные высказывания или отрицания элементарных высказываний, а z суть высказывания, образованные из a, b, c, d, их отрицаний и операторов $\cdot$, $\vee$, $\sim$ и $\rightarrow$.

$D2$. Теорию условных высказываний мы будем считать достаточно полной, если и только если выполняются условия:

1) все базисные формулы $x \vdash y$, являющиеся тавтологиями и непарадоксальные, доказуемы;

2) все формулы $x \vdash y$, образующиеся из базисных путем подстановки любых высказываний на место элементарных, доказуемы.

Пункт второй выполняется в силу того, что мы используем аксиомные схемы. Распространить правила для базисных формул на любое число членов дизъюнкций и конъюнкций не представляет труда. Отрицания в антецедентах и консеквентах высказываний $x \rightarrow y$ всегда могут быть доведены до элементарных высказываний. Так что остается выяснить, удовлетворяют наши системы пункту 1 определения $D2$ или нет. Мы не будем приводить здесь доказательство того, что наши системы полны в смысле $D2$. Оно осуществляется путем пересмотра всех случаев (что довольно громоздко, хотя и не представляет принципиальных трудностей), выяснения непарадоксальных тавтологий и доказательства их.

Указанный метод не отличается таким изяществом, каким обладают методы доказательства полноты систем классической логики. Но он вполне правомерен и даже оказывается незаменимым, стоит только перейти от того крайне упрощенного подхода к проблемам логики, какой имел место в классической математической логике, к более детальному и дифференцированному подходу.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ТЕОРИЯ КВАНТОРОВ

§ 1. Высказывания с кванторами

Системы теории кванторов комплексной логики рассматривались в [4, 5]. Они образуются благодаря излагаемым ниже дополнениям к системам общей теории дедукции и модификациям их.

По некоторым соображениям рассмотрение систем теории кванторов удобнее начать с классического случая, а неклассический случай затем получить путем дополнений к алфавиту, определениям и прочим элементам теории кванторов, а также некоторых их изменений.

Алфавит:

1) $\forall$ — квантор общности («все»);

2) $\exists$ — квантор существования («некоторые»);

3) $\leftarrow$ — оператор предикативности.

*D*1. Элементарное высказывание: $(a \leftarrow b)$ есть элементарное высказывание, если и только если a есть субъект, а b есть соответственно местный предикат.

*D*2. Высказывание:

1) элементарное высказывание есть высказывание;

2) если x, x^1, ..., x^n суть высказывания, то $\sim x$, $(x^1 \cdot \ldots \cdot x^n)$ и $(x^1 \vee \ldots \vee x^n)$ суть высказывания;

3) если a есть термин (субъект или предикат), а x есть высказывание, то $(\forall a)\, x$ и $(\exists a) x$ суть высказывания;

4) нечто есть высказывание лишь в силу 1—3.

*D*3. Кванторная группа: $(\forall a)$ и $(\exists a)$ суть кванторные группы, если a есть термин.

$D4$. Свободные и связанные термины: если термин a входит в высказывание x, а кванторные группы $(\forall a)$ и $(\exists a)$ не входят в x, то a свободен в x (не связан в x; входит свободно в x); если a входит в x, то a связан (не свободен; входит связанно) в $(\forall a)x$ и $(\exists a)x$.

$D5$. Свободное и связанное вхождение термина в высказывание: если a связан в x, то все вхождения a в x суть связанные вхождения; если x входит в y, и при этом a связан в x, то вхождение a в x есть связанное вхождение a в y; в остальных случаях вхождение a в y является свободным.

$D6$. Кванторная группа $(\mathrm{K}a)$ является вырожденной в $(\mathrm{K}a)\,x$, если и только если в x нет свободных вхождений a (или a не входит свободно в x); K есть $\forall$ или $\exists$.

$D7$. Бескванторная форма формулы $x \vdash y$ (формулы $\vdash x$) есть формула, которая образуется из нее путем исключения всех кванторных групп.

§ 2. Система S^s_{cq}

Система S^s_{cq} сильной теории кванторов для классического случая получается путем добавления к S^s того, что приведено в § 1, и следующих аксиомных схем и правил вывода.

Аксиомные схемы

$A1$. $(\forall a)x \vdash x$

$A2$. $x \vdash (\exists a)x$

$A3$. $(\forall a)x(\exists a)y \vdash (\exists a)(xy)$

$A4$. $(\forall a)(x \vee y) \vdash (\forall a)x \vee (\exists a)y$

$A5$. $(\exists a)x \vdash (\forall a)x$,

где a не выходит свободно в x.

$A6$. $(\forall a)x \vdash \sim(\exists a)\sim x$

$A7$. $\sim(\exists a)\sim x \vdash (\forall a)x$

Правила вывода:

$R1$. Если $x \vdash y$, то $(\forall a)x \vdash (\forall a)y$.

$R2$. Если $x \vdash y$, то $(\exists a)x \vdash (\exists a)y$.

Непротиворечивость, независимость и отчасти проблема полноты S^s_{cq} рассмотрены в работе Г. М. Щегольковой [16].

§ 3. Непарадоксальность S^s_{cq}

*МТ*1. Система S^s_{cq} непарадоксальна в том же смысле, что и S^s: в доказуемых формулах $x \vdash y$ в заключение y не входят элементарные (в смысле теории кванторов) высказывания, отсутствующие в посылке x. Теорема очевидна из вида дополнительных аксиомных схем и правил: в аксиомных схемах в заключения и посылки входят одни и те же высказывания, если отбросить кванторные группы и отрицания и исключить повторения; правила вывода это свойство сохраняют.

*МТ*2. Формулы.

$$(\forall a)(a \leftarrow b) \vdash (c \leftarrow b)$$

$$(c \leftarrow b) \vdash (\exists a)(a \leftarrow b)$$

и другие формулы $x \vdash y$, в которых в заключение входят термины, отсутствующие в посылке, недоказуемы в S^s_{cq} (следствие *МТ*1).

*МТ*3. Если $x \vdash y$ доказуема в S^s_{cq}, то ее бескванторная форма доказуема в S^s (теорема очевидна из вида бескванторных форм аксиом и получаемых из них бескванторных формул по правилам вывода).

§ 4. Непротиворечивость S^s_{cq}

Для доказательства непротиворечивости S^s_{cq} достаточно показать, что бескванторные формы доказуемых формул S^s_{cq} доказуемы в S^s (т. е. суть тавтологии). А это действительно так, поскольку бескванторные формы аксиом имеют вид соответственно

$$\begin{array}{ll} x \vdash x & x \vdash x \\ x \vdash x & x \vdash \sim\sim x \\ xy \vdash xy & \sim\sim x \vdash x, \\ x \vee y \vdash x \vee y & \end{array}$$

а правила вывода из бескванторных формул $x \vdash y$ позволяют получить только сами эти формулы.

§ 5. Независимость S^s_{cq}

Для доказательства независимости аксиомных схем, правил вывода S^s_{cq} примем исключающие семантические правила и общее семантическое правило (в каждом случае сначала применяется первое, затем — второе).

Для $A1$: если в $x \vdash y$ термин a в y входит свободно, а в a нет, то $x \vdash y$ имеет значение 0. При этом формула $(\forall a)(a \leftarrow b) \vdash (a \leftarrow b)$ имеет значение 0.

Для $A2$: если в $x \vdash y$ термин a в x входит свободно, а в y нет, то $x \vdash y$ имеет значение 0. При этом формула $(a \leftarrow b) \vdash (\exists a)(a \leftarrow b)$ имеет значение 0.

Для $A3$: $(\forall a)x$ заменяется на $(\exists a)x$; если a входит свободно в x, то x заменяется на $(\exists a)x$; если $\sim$ входит во все аксиомы данной аксиомной схемы, то $(\exists a)\sim x$ заменяется на $\sim(\exists a)x$.

Для $A4$: $(\exists a)x$ заменяется на $(\forall a)x$; если a входит свободно в x, то x заменяется на $(\forall a)x$; если $\sim$ входит во все аксиомы данной аксиомной схемы, то $(\exists a)\sim x$ заменяется на $\sim(\forall a)x$.

Для $A5$: отбрасывается ограничение на вхождение a в x.

Для $A6$: если $(\exists b)\sim z$ имеет значение 1, то $(\forall b)z$ имеет значение 1.

Для $A7$: если $(\exists b)\sim z$ имеет значение 0, то $(\forall b)z$ имеет значение 0.

Для $R1$: если $(\forall b)\, zv$ имеет значение 1, и при этом в z входит термин, отсутствующий в v, то $(\forall b)\, z$ имеет значение 0. С помощью $R1$ доказуема формула $(\forall b)\,(zv) \vdash (\forall b)\, z$, принимающая значение 0, если z есть $(b \leftarrow c)$, а v есть $(b \leftarrow d)$.

Для $R2$: если $(\exists b)\,(zv)$ имеет значение 1, и при этом z содержит термин, отсутствующий в v, то $(\exists b)\, z$ имеет значение 0. С помощью $R2$ доказуема формула $(\exists b)\,(zv) \vdash$ $\vdash (\exists b)\, z$, принимающая значение 0, если z есть $(b \leftarrow c)$, а v есть $(b \leftarrow d)$.

Общее семантическое правило: все прочие формулы, к которым неприменимо исключающее семантическое правило, равнозначны своим бескванторным формам.

§ 6. Некоторые следствия

В дальнейшем будем делать ссылки только на аксиомные схемы, правила вывода, теоремные схемы и метатеоремы S^s_{cq}. Что касается соответствующих элементов общей теории дедукции, то будем ограничиваться лишь ссылкой на систему (в данном случае — на S^s) или вообще будем их опускать как тривиальные.

*MT*1. Если $x \vdash yz$ и $z \vdash v$ доказуемы, то $x \vdash yv$ доказуема (в силу S^s); если $xy \vdash z$ и $v \vdash x$ доказуемы, то $vy \vdash z$ доказуема (в силу S^s).

*MT*2. Если $x \vdash y$ доказуема в S^s_{cq}, и множества элементарных высказываний, входящих в x и y, совпадают, то $\sim y \vdash \sim x$ доказуема в S^s_{cq}.

Доказательство *MT*2. В S^s_{cq} имеют силу следующие теоремные схемы:

*T*1. $\sim(\forall a)\, x \vdash (\exists a) \sim x$ [*A*6, *A*7]

*T*2. $(\exists a)\, x \vdash \sim(\forall a) \sim x$ [*A*6, *A*7]

*T*3. $\sim x \vdash \sim(\forall a)\, x$ [*A*2, *T*2]

*T*4. $\sim(\exists a)\, x \vdash \sim x$ [*A*6, *A*7, *A*1]

$T5.\ \sim(\exists a)(xy) \vdash \sim((\forall a)x(\exists a)y)$ [$A4$, $A6$, $A7$, $T1$, $T2$]

$T6.\ \sim((\forall a)x \vee (\exists a)y) \vdash \sim(\forall a)(x \vee y)$ [$A3$, $A6$, $A7$, $T1$, $T2$]

$T7.\ \sim(\forall a)x \vdash \sim(\exists a)x$,

где a не входит свободно в x [$A5$, $T1$, $T2$, $A6$, $A7$]

$T8.\ \sim\sim(\exists a)\sim x \vdash \sim(\forall a)x$ ($A6$, $A7$]

$T9.\ \sim(\forall a)x \vdash \sim\sim(\exists a)\sim x$ [$A6$, $A7$]

В S^s_{cq} имеют силу также следующие утверждения, которые можно рассматривать как производные правила вывода:

MT^*1. Если $x \vdash y$ доказуема в S^s_{cq}, и при этом множества элементарных высказываний, входящих в x и y, совпадают, то $\sim(\forall a)\, y \vdash \sim(\forall a)\, x$ доказуема в S^s_{cq}.

MT^*2. Если $x \vdash y$ доказуема в S^s_{cq}, то при этом же условии, что и в MT^*1, доказуема и $\sim(\exists a)\, y \vdash \sim(\exists a)\, x$.

Справедливость MT^*1 видна из следующего: если $x \vdash y$ такова, как сказано в MT^*1, то согласно $T3$—$T9$ доказуема $\sim y \vdash \sim x$; по правилу $R2$ доказуема $(\exists a) \sim y \vdash$ $\vdash (\exists a) \sim x$, откуда по $T1$ и $T2$ имеем, что доказуема $\sim(\forall a)\, y \vdash \sim(\forall a)\, x$. Аналогично для MT^*2 (только используется $R1$, $A6$ и $A7$).

Поскольку для каждой аксиомы $x \vdash y$ доказуема $\sim y \vdash \sim x$, ($T3$ — $T9$), а правила вывода это сохраняют (MT^*1 и MT^*2), то $MT2$ доказана.

$MT3$. Если $x \vdash y \vee z$ и $z \vdash v$ доказуемы, и множества элементарных высказываний, входящих в заключения и посылки этих формул, совпадают, то $x \vdash y \vee v$ доказуема (следствие $MT1$ и $MT2$).

$MT4$. Если $x \vee y \vdash z$ и $v \vdash x$ доказуемы, то при том же условии, что в $MT3$, доказуема $v \vee y \vdash z$ (следствие $MT1$ и $MT2$).

$MT5$. Если $\sim x \vdash y$ и $x \vdash v$ доказуемы, то при том же условии, что в $MT3$, доказуема $\sim v \vdash y$; если $x \vdash \sim y$

и $v \vdash y$ доказуемы, то при том же условии, что в $MT3$, доказуема $x \vdash \sim v$ (следствие $MT1$ и $MT2$).

В S^s_{cq} имеют силу также следующие теоремные схемы

$T10.\ (\forall a)\, x\, (\forall b)\, x \vdash (\forall a)\, (\exists b)\, x$ [$A1, A2, R1, T17$]

$T11.\ (\forall a)\, x\, (\exists b)\, x \vdash (\forall a)\, (\exists b)\, x$ [$A1, R1, T17$]

$T12.\ (\exists a)\, x\, (\forall b)\, x \vdash (\exists a)\, (\forall b)\, x$ [$A2$]

$T13.\ (\exists a)\, x\, (\exists b)\, x \vdash (\exists a)\, (\exists b)\, x$ [$A2$]

$T14.\ (\forall a)\, (\forall b)\, x \vdash (\forall b)\, (\forall a)\, x$ [$A1, R1, T17$]

$T15.\ (\exists a)\, (\forall b)\, x \vdash (\forall b)\, (\exists a)\, x$ [$A1, A2, R1, T17, R2, T18$]

$T16.\ (\exists a)\, (\exists b)\, x \vdash (\exists b)\, (\exists a)\, x$ [$A2, R2, T18$]

$T17.\ x \vdash (\forall a)\, x$, где a не входит свободно в x [$A2$]

$T18.\ (\exists a)\, x \vdash x$, где a не входит свободно в x [$A1$]

$T19.\ (\forall a)\, x\, (\forall a)\, y \vdash (\forall a)\, (xy)$ [$A1, R1, T17$]

$T20.\ (\forall a)\, (xy) \vdash (\forall a)\, x\, (\forall a)\, y$ [$A1, R1, T17$]

$T21.\ (\exists a)\, (xy) \vdash (\exists a)\, x\, (\exists a)\, y$ [$R2$]

$T22.\ (\exists a)\, (x \vee y) \vdash (\exists a)\, x \vee (\exists a)\, y$ [$T19, T20, A6, A7$]

$T23.\ (\exists a)\, x \vee (\exists a)\, y \vdash (\exists a)\, (x \vee y)$ [$T19, T20, A6, A7$]

$T24.\ (\forall a)\, x \vee (\forall a)\, y \vdash (\forall a)\, (x \vee y)$ [$T21, MT2, A6, A7$]

$T25.\ (\forall a)\, x \vee (\exists a)\, y \vdash (\exists a)\, (x \vee y)$ [$T23, A1, A2, MT4$]

$T26.\ (\exists a)\, x \vee (\forall a)\, y \vdash (\exists a)\, (x \vee y)$ [$T23, A1, A2, MT4$]

$T27.\ (\forall a)\, x \vdash (\exists a)\, x$ [$A1, A2$]

$T28.\ \sim (\exists a)\, x \vdash \sim (\forall a)\, x$ [$T27, MT2$]

$T29.\ (\forall a)\, (xy) \vdash (\forall a)\, x\, (\exists a)\, y$ [$T20, T27$]

$T30.\ (\forall a)\, (xy) \vdash (\exists a)\, x\, (\forall a)\, y$ [$T20, T27$]

$T31.\ (\forall x)\, (xy) \vdash (\exists a)\, x\, (\exists a)\, y$ [$T20, T27$]

$T32.\ (\forall a)\, (x \vee y) \vdash (\exists a)\, x \vee (\forall a)\, y$ [$A3$]

$T33.\ (\exists a)\, (\forall b)\, x \vdash (\exists b)\, (\exists a)\, x$ [$T15, T27$]

$T34.\ (\forall a)\, (x \vee y) \vdash (\exists a)\, x \vee (\exists a)\, y$ [$A3, MT3$]

$T35.\ (\forall a)\, x \vee (\forall a)\, y \vdash (\exists a)\, (x \vee y)$ [$T24, T27$]

$T36.\ (\forall a)\, x\, (\forall a)\, y \vdash (\exists a)\, (xy)$ [$T19, T27$]

$T37.\ \sim(\forall a)\sim x \vdash (\exists a)\, x$ [A6, A7]

$T38.\ (\forall a)(\forall b)\, x \vdash (\forall b)(\exists a)\, x$ [A1, A2, R1, T17]

$T39.\ (\forall a)(\forall b)\, x \vdash (\exists b)(\forall a)\, x$ [A1, R1, R2, T18]

$T40.\ (\forall a)(\forall b)\, x \vdash (\exists b)(\exists a)\, x$ [A1, A2]

$T41.\ (\forall a)(\exists b)\, x \vdash (\exists b)(\exists a)\, x$ [A1, T16]

$T42.\ (\exists a)\, x\, (\forall a)\, y \vdash (\exists a)(xy)$ [A3]

§ 7. Главная интерпретация

Возможны две равноценные (по результатам) семантические интерпретации кванторов — прямая и косвенная.

Косвенная заключается в следующем.

$D1$. Отмеченный термин: если a есть термин, то ia ($i = 0, 1, 2, \ldots$) есть его отмеченный термин.

Символом $x\,(ia)$ будем обозначать высказывание, которое образуется из x путем замены a на ia везде, где a входит свободно в x.

$D2$. Интерпретационная форма данной формулы $x \vdash y$ есть формула, которая получается из нее в результате следующих операций.

1) если a входит свободно в $x \vdash y$, то $x \vdash y$ заменяется на $(\forall a)x \vdash (\forall a)\, y$ или $(\exists a)x \vdash (\exists a)\, y$; и так для всех терминов, имеющих свободные вхождения в $x \vdash y$;

2) все вырожденные кванторные группы отбрасываются;

3) все вхождения вида $(\forall b)\, z$ заменяются конъюнкциями $z\,(1b) \cdot \ldots \cdot z\,(nb)$; все вхождения вида $(\exists b)\, z$ заменяются дизъюнкциями $z\,(1b) \vee \ldots \vee z\,(nb)$; если $n = 0$, то $(\forall a)z$ и $(\exists a)z$ заменяются на z.

$D3$. Формула $x \vdash y$ есть тавтология, если и только если каждая ее интерпретационная форма есть тавтология при любом числе отмеченных терминов для каждого термина, входящего в нее.

Прямая интерпретация имеет такой вид:

1) если $(\forall a)\, x$ приписали значение 1, то должны и x приписать значение 1; если x имеет значение 1, то значение $(\forall a)\, x$ не зависит от x;

2) если $(\forall a)\, x$ приписали значение 0, то значение x не зависит от значения $(\forall a)\, x$; если x имеет значение 0, то $(\forall a)\, x$ имеет значение 0;

3) если при установлении значения формулы следования, в которую входит x, мы, приписав посылке значение 1 или заключению значения 0, вынуждены вследствие этого приписать x значение 1, то должны $(\forall a)\, x$, входящему в ту же формулу, приписать значение 1; если же мы при этом не вынуждены приписывать x значение 1 (т. е. остается возможность приписать x значение 0), то $(\forall a)\, x$ приписывается значение 0;

4) $(\exists a)\, x$ равнозначно $\sim (\forall a) \sim x$;

5) если a не входит свободно в x, то x равнозначно $(\forall a)\, x$ и $(\exists a)\, x$.

D^*3. Формула $x \vdash y$ есть тавтология, если и только если она имеет значение 1 для любых комбинаций значений входящих в нее высказываний, допускаемых правилами приписывания значений.

Рассмотренные интерпретации равноценны в том смысле, что если с помощью одной из них некоторой формуле приписывается значение 1 (или 0), то и с помощью другой этой же формуле приписывается значение 1 (соответственно 0). Эти способы приписывать значения высказываниям и формулам следования эффективны в том смысле, что для любого высказывания и любой формулы, рассматриваемым в теории кванторов, можно установить, являются они тавтологиями или нет. Тот факт, что при построении интерпретационных формул число отмеченных терминов не ограничено, принципиальных препятствий не создает, ибо методом математической индукции можно построить доказательство для любого числа отмеченных терминов.

§ 8. Полнота S^s_{cq}

В логической системе, определяющей свойства кванторов, должны быть доказуемы формулы, которые интерпретируются так: 1) как правила введения и удаления кванторов; 2) как правила, разрешающие перестановку кванторов; 3) как правила замены одних кванторов другими; 4) как правила, разрешающие вынос кванторов из дизъюнкций и конъюнкций и внесение их в конъюнкции и дизъюнкции; 5) как правила введения и удаления отрицаний у кванторов. Поэтому специфические правила следования, определяющие свойства кванторов, должны быть такими, чтобы в формулах $x^* \vdash y^*$, являющихся бескванторными формами формул $x \vdash y$, посылки x^* и заключения y^* были тождественными или различались бы только так, что одни из них можно было получить из других заменой вхождений $\sim\sim z$ на z (или наоборот). Проблема полноты S^s_{cq} в узком смысле выглядит так: все или не все тавтологии такого типа доказуемы в S^s_{cq}. Покажем, что система S^s_{cq} полна прежде всего в этом узком смысле.

D_1. Формула $x \vdash y$ является базисной формулой, если и только если она есть одна из формул такого вида:

1. $\alpha (Ka) \beta z \vdash \gamma z$
2. $\gamma z \vdash \alpha (Ka) \beta z$
3. $\alpha (K^1a) \beta z \vdash \gamma (K^2a) \delta z$
4. $\alpha (K^1a) (zv) \vdash \beta (K^2a) z \gamma (K^3a) v$
5. $\alpha (K^1a) (z \vee v) \vdash \beta (K^2a) z \vee \gamma (K^3a) v$
6. $\alpha (K^1a) z \beta (K^2a) v \vdash \gamma (K^3a) (zv)$
7. $\alpha (K^1a) z \vee \beta (K^2a) v \vdash \gamma (K^3a) (z \vee v)$
8. $\alpha (K^1a) \beta (K^2b) z \vdash \gamma (K^3b) \delta (K^4a) z$,

где K, K^1, K^2 и K^3 суть $\forall$ и $\exists$ в любых комбинациях, а α, β, γ и δ означают наличие или отсутствие отрицания в любых комбинациях.

*MT*1. Если базисная формула $x \vdash y$ есть тавтология (с ограничением § 9 пятой главы), она доказуема в S^s_{cq}.

Теорема *MT*1 доказывается путем пересмотра всех возможных базисных формул. Поскольку в S^s_{cq} доказуемы формулы

$$(\forall a)\, x \dashv\vdash \sim (\exists a) \sim x$$
$$(\exists a)\, x \dashv\vdash \sim (\forall a) \sim x$$
$$\sim \sim x \dashv\vdash x$$
$$\sim (xy) \dashv\vdash \sim x \vee \sim y$$
$$x \vee y \dashv\vdash \sim (\sim x \sim y)$$
$$\sim (x \vee y) \dashv\vdash \sim x \sim y,$$

то число случаев, которые необходимо рассмотреть, сокращается. Эти случаи сводятся к случаям 1—8 без отрицаний перед кванторами. Кроме того, в S^s_{cq} доказуемы формулы

$$(\mathrm{K}a)\, x \dashv\vdash x \qquad (\mathrm{K}^1 a)\, x \dashv\vdash (\mathrm{K}^2 a)\, x,$$

в которых a не входит свободно в x.

Дальнейший метод перебора базисных формул таков.

В первом случае остается четыре подслучая

$$(\forall a)\, y \vdash y \qquad (\exists a)\, y \vdash y$$
$$(\forall a) \sim y \vdash y \qquad (\exists a) \sim y \vdash y.$$

Из них только одна формула $(\forall a)\, y \vdash y$ есть тавтология, и она доказуема в $S^s_{cq}\,(A1)$.

Во втором случае остается четыре подслучая

$$x \vdash (\forall a)\, x \qquad x \vdash (\exists a)\, x$$
$$x \vdash (\forall a) \sim x \qquad x \vdash (\exists a) \sim x,$$

и только в одном из них формула есть тавтология, а именно — $x \vdash (\exists a)\, x$. Она доказуема в S^s_{cq} $(A2)$.

В третьем случае остается восемь подслучаев

$$(\forall a)\, z \vdash (\forall a)\, z \qquad (\forall a) \sim z \vdash (\forall a)\, z$$
$$(\exists a)\, z \vdash (\forall a)\, z \qquad (\forall a) \sim z \vdash (\exists a)\, z$$
$$(\forall a)\, z \vdash (\exists a)\, z \qquad (\exists a) \sim z \vdash (\forall a)\, z$$
$$(\exists a)\, z \vdash (\exists a)\, z \qquad (\exists a) \sim z \vdash (\exists a)\, z$$

Из них только первый, третий и четвертый суть тавтологии, и они доказуемы в S^s_{cq} ($a \vdash a$ системы S^s и $T27$VII6).

В четвертом случае остается восемь подслучаев

$$(\forall a)(zv) \vdash (\forall a)\, z\, (\forall a)\, v \qquad (\exists a)(zv) \vdash (\forall a)\, z\, (\forall a)\, v$$
$$(\forall a)(zv) \vdash (\forall a)\, z\, (\exists a)\, v \qquad (\exists a)(zv) \vdash (\forall a)\, z\, (\exists a)\, v$$
$$(\forall a)(zv) \vdash (\exists a)\, z\, (\forall a)\, v \qquad (\exists a)(zv) \vdash (\exists a)\, v\, (\forall a)\, v$$
$$(\forall a)(zv) \vdash (\exists a)\, z\, (\exists a)\, v \qquad (\exists a)(zv) \vdash (\exists a)\, v\, (\exists a)\, v$$

Из них только первые четыре и последний суть тавтологии, и они доказуемы в S^s_{cq} ($T20$, $T29$, $T30$, $T31$, $T21$ из § 6).

В пятом случае остается восемь подслучаев

$$(\forall a)(z \vee v) \vdash (\forall a)\, z \vee (\forall a)\, v$$
$$(\forall a)(z \vee v) \vdash (\forall a)\, z \vee (\exists a)\, v$$
$$(\forall a)(z \vee v) \vdash (\exists a)\, z \vee (\forall a)\, v$$
$$(\forall a)(z \vee v) \vdash (\exists a)\, z \vee (\exists a)\, v$$
$$(\exists a)(z \vee v) \vdash (\forall a)\, z \vee (\forall a)\, v$$
$$(\exists a)(z \vee v) \vdash (\forall a)\, z \vee (\exists a)\, v$$
$$(\exists a)(z \vee v) \vdash (\exists a)\, z \vee (\forall a)\, v$$
$$(\exists a)(z \vee v) \vdash (\exists a)\, z \vee (\exists a)\, v$$

Из них только вторая, третья, четвертая и восьмая суть тавтологии, и они доказуемы в S^s_{cq} ($A4$, $T32$, $T34$ и $T\,22$ из § 6).

В шестом случае остается восемь подслучаев

$$(\forall a)\, z\, (\forall a)\, v \vdash (\forall a)(zv) \qquad (\forall a)\, z\, (\forall a)\, v \vdash (\exists a)(zv)$$
$$(\forall a)\, z\, (\exists a)\, v \vdash (\forall a)(zv) \qquad (\forall a)\, z\, (\exists a)\, v \vdash (\exists a)(zv)$$
$$(\exists a)\, z\, (\forall a)\, v \vdash (\forall a)(zv) \qquad (\exists a)\, z\, (\forall a)\, v \vdash (\exists a)(zv)$$
$$(\exists a)\, z\, (\exists a)\, v \vdash (\forall a)(zv) \qquad (\exists a)\, z\, (\exists a)\, v \vdash (\exists a)(zv)$$

Только первый, пятый, шестой и седьмой из них суть тавтологии, и они доказуемы в S^s_{cq} ($T19$, $T36$, $A3$, $T42$ из § 6).

В седьмом случае остается восемь подслучаев

$$(\forall a) z \vee (\forall a) v \vdash (\forall a)(z \vee v)$$
$$(\forall a) z \vee (\exists a) v \vdash (\forall a)(z \vee v)$$
$$(\exists a) z \vee (\forall a) v \vdash (\forall a)(z \vee v)$$
$$(\exists a) z \vee (\exists a) v \vdash (\forall a)(z \vee v)$$
$$(\forall a) z \vee (\forall a) v \vdash (\exists a)(z \vee v)$$
$$(\forall a) z \vee (\exists a) v \vdash (\exists a)(z \vee v)$$
$$(\exists a) z \vee (\forall a) v \vdash (\exists a)(z \vee v)$$
$$(\exists a) z \vee (\exists a) v \vdash (\exists a)(z \vee v)$$

Из них тавтологиями являются только первый, пятый, шестой, седьмой и восьмой, и они доказуемы в S^s_{cq} ($T24$, $T35$, $T25$, $T26$, $T23$ из § 6).

Наконец, в восьмом случае остается шестнадцать подслучаев

$(\forall a)(\forall b) z \vdash (\forall b)(\forall a) z$	$(\exists a)(\forall b) z \vdash (\forall b)(\forall a) z$
$(\forall a)(\forall b) z \vdash (\forall b)(\exists a) z$	$(\exists a)(\forall b) z \vdash (\forall b)(\exists a) z$
$(\forall a)(\forall b) z \vdash (\exists b)(\forall a) z$	$(\exists a)(\forall b) z \vdash (\exists b)(\forall a) z$
$(\forall a)(\forall b) z \vdash (\exists b)(\exists a) z$	$(\exists a)(\forall b) z \vdash (\exists b)(\exists a) z$
$(\forall a)(\exists b) z \vdash (\forall b)(\forall a) z$	$(\exists a)(\exists b) z \vdash (\forall b)(\forall a) z$
$(\forall a)(\exists b) z \vdash (\forall b)(\exists a) z$	$(\exists a)(\exists b) z \vdash (\forall b)(\exists a) z$
$(\forall a)(\exists b) z \vdash (\exists b)(\forall a) z$	$(\exists a)(\exists b) z \vdash (\exists b)(\forall a) z$
$(\forall a)(\exists b) z \vdash (\exists b)(\exists a) z$	$(\exists a)(\exists b) z \vdash (\exists b)(\exists a) z$

Из них только первый, второй, третий, четвертый, восьмой, десятый, двенадцатый и шестнадцатый суть тавтологии. И они доказуемы в S^s_{cq} ($T14$, $T38$, $T39$, $T40$, $T41$, $T15$, $T33$, $T16$ из § 6).

*MT*2. Если формула

$$(\mathrm{K}a)(z^1 z^2 \ldots z^n) \vdash (\mathrm{K}^1 a) z^1 (\mathrm{K}^2 a) z^2 \ldots (\mathrm{K}^n a) z^n$$

есть тавтология (с ограничением), она доказуема в S^s_{cq}.

Доказательство $MT2$. Если наша формула есть тавтология, то тавтологиями будут все формулы A^i

$$(\mathrm{K}a)(z^1 z^2 \ldots z^n) \vdash (\mathrm{K}^i a) z^i,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. В силу S^s доказуемы

$$(\mathrm{K}a)(z^1 z^2 \ldots z^n) \dashv\vdash (\mathrm{K}a)(z^i(z_1 \ldots z_{n-1})),$$

где $z_1, \ldots, z_{n-1}$ суть все остальные из $z^1, \ldots, z^n$, отличные от z^i. Очевидно, если будут доказуемы формулы B^i

$$(\mathrm{K}a)(z^i(z_1 \ldots z_{n-1})) \vdash (\mathrm{K}^i a) z^i,$$

то будут доказуемы и формулы A^i. И если A^i суть тавтологии, то и B^i суть тавтологии, и наоборот. Но если B^i есть тавтология (с ограничением), будет тавтологией базисная формула

$$(\mathrm{K}a)(z^i(z_1 \ldots z_{n-1})) \vdash (\mathrm{K}^i a) z^i (\mathrm{K}^* a)(z_1 \ldots z_{n-1}).$$

Согласно $MT1$ последняя доказуема. Значит согласно S^s доказуема B^i и A^i. Поскольку это касается всех A^i, то неоднократным применением $R3$ системы S^s получим, что наша формула доказуема.

$MT3$. Если формула

$$(\mathrm{K}^1 a) z^1 (\mathrm{K}^2 a) z^2 \ldots (\mathrm{K}^n a) z^n \vdash (\mathrm{K}a)(z^1 z^2 \ldots z^n)$$

есть тавтология, то она доказуема в S^s_{cq}.

Доказательство $MT3$. Если данная формула есть тавтология и K есть $\forall$, то все K^i должны быть тоже $\forall$. Но в таком случае последовательно доказываются формулы

$$(\forall a) z^1 (\forall a) z^2 \vdash (\forall a)(z^1 z^2)$$
$$(\forall a)(z^1 z^2)(\forall a) z^3 \vdash (\forall a)((z^1 z^2) z^3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\forall a)((\ldots(z^1 z^2) z^3) \ldots) z^{n-1})(\forall a) z^n \vdash$$
$$\vdash (\forall a)((\ldots(z^1 z^2) \ldots) z^{n-1}) z^n)$$
$$(\forall a)((\ldots((z^1 z^2) z^3) \ldots) z^{n-1}) z^n) \vdash (\forall a)(z^1 z^2 \ldots z^n).$$

Если К есть $\exists$, то доказательство аналогично (добавляется лишь использование $T27$VII6).

МТ4. Если формула

$$(\mathrm{K}a)(z^1 \vee z^2 \vee \ldots \vee z^n) \vdash (\mathrm{K}^1 a) z^1 \vee (\mathrm{K}^2 a) z^2 \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (\mathrm{K}^n a) z^n$$

есть тавтология (с ограничением), она доказуема в S^s_{cq}.

Доказательство *МТ4*. Если К есть $\forall$, то данная формула может быть тавтологией лишь при условии, если ни один из $\mathrm{K}^1,\ldots,\mathrm{K}^n$ не есть $\forall$ или только один из них есть $\forall$ (в чем легко убедиться, допустив два отмеченных термина). Если К есть $\exists$, то все $\mathrm{K}^1, \ldots, \mathrm{K}^n$ должны быть тоже $\exists$. Пусть К есть $\forall$. В таком случае доказуемы формулы

$$(\forall a)(z^1 \vee (z^2 \vee \ldots \vee z^n)) \vdash (\forall a) z^1 \vee$$
$$\vee (\exists a)(z^2 \vee \ldots \vee z^n)$$
$$(\forall a)(z^1 \vee (z^2 \vee \ldots \vee z^n)) \vdash (\exists a) z^1 \vee$$
$$\vee (\forall a)(z^2 \vee \ldots \vee z^n).$$

Если K^1 есть $\forall$, выбираем первую из них, если K^1 есть $\exists$, выбираем вторую. В первом случае будут доказуемы

$$(\exists a)(z^2 \vee (z^3 \vee \ldots \vee z^n)) \vdash$$
$$\vdash (\exists a) z^2 \vee (\exists a)(z^3 \vee \ldots \vee z^n)$$
$$(\exists a)(z^3 \vee (z^4 \vee \ldots \vee z^n)) \vdash$$
$$\vdash (\exists a) z^3 \vee (\exists a)(z^4 \vee \ldots \vee z^n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\exists a)(z^{n-1} \vee z^n) \vdash (\exists a) z^{n-1} \vee (\exists a) z^n$$

Отсюда в силу *МТ1* имеем

$$(\forall a)(z^1 \vee \ldots \vee z^n) \vdash (\forall a) z^1 \vee (\exists a) z^2 \vee \ldots \vee (\exists a) z^n.$$

Во втором случае проделываем то же, что и в первом, но для формулы $(\forall a)$ $(z^2 \vee \ldots \vee z^n)$. Если К есть $\exists$, то доказуемы

$$(\exists a)(z^1 \vee (z^2 \vee \ldots \vee z^n)) \vdash$$
$$\vdash (\exists a) z^1 \vee (\exists a)(z^2 \vee \ldots \vee z^n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\exists a)(z^{n-1} \vee z^n) \vdash (\exists a) z^{n-1} \vee (\exists a) z^n,$$

откуда по $MT1$ имеем

$$(\exists a)(z^1 \vee \ldots \vee z^n) \vdash (\exists a) z^1 \vee \ldots \vee (\exists a) z^n.$$

$MT5$. Если формула

$$(\mathrm{K}^1 a) z^1 \vee \ldots \vee (\mathrm{K}^n a) z^n \vdash (\mathrm{K} a)(z^1 \vee \ldots \vee z^n)$$

есть тавтология (с ограничением), она доказуема в S^{s}_{cq}.

Доказательство $MT5$. Если K есть $\forall$, то данная формула может быть тавтологией лишь при условии, если все $\mathrm{K}^1, \ldots, \mathrm{K}^n$ суть $\forall$ (в чем легко убедиться на примере случая двух отмеченных терминов и $n = 3$). В таком случае будут доказуемы

$$(\forall a) z^1 \vee \ldots \vee (\forall a) z^n \vdash$$
$$\vdash (\forall a) z^1 \vee \ldots \vee (\forall a)(z^{n-1} \vee z^n)$$
$$(\forall a) z^1 \vee \ldots \vee (\forall a) z^n \vdash$$
$$\vdash (\forall a) z^1 \vee \ldots \vee (\forall a)(z^{n-2} \vee (z^{n-1} \vee z^n))$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\forall a) z^1 \vee \ldots \vee (\forall a) z^n \vdash$$
$$\vdash (\forall a)(z^1 \vee (z^2 \vee (\ldots \vee (z^{n-1} \vee z^n) \ldots),$$

откуда по S^s получаем

$$(\forall a) z^1 \vee \ldots \vee (\forall a) z^n \vdash (\forall a)(z^1 \vee \ldots \vee z^n).$$

Если K есть $\exists$, то данная формула будет тавтологией при любом наборе $\mathrm{K}^1, \ldots, \mathrm{K}^n$. При этом будет иметь силу рассуждение, отличающееся от предшествующего только тем, что в нем будет фигурировать по крайней мере один квантор $\exists$ или будет использована $T27$VII6.

$MT6$. Если формула

$$(\mathrm{K}^1 a^1)(\mathrm{K}^2 a^2) \ldots (\mathrm{K}^n a^n) z \vdash v,$$

где v отличается от посылки лишь иным порядком кванторов, есть тавтология (с ограничением), она доказуема в S^s_{cq}.

Доказательство $MT6$. Случай 1: v отличается от посылки только порядком двух первых кванторов. В этом случае формула есть базисная тавтология и согласно $MT1$ доказуема. Аналогично в случае 2, когда v отличается от посылки лишь порядком двух последних кванторов. Случай 3: v отличается от посылки лишь порядком двух кванторов $(K^i a^i)$ и $(K^{i+1}a^{i+1})$, где $i > 1$ и $i + 1 < n$. В этом случае будет доказуема базисная тавтология

$$(K^i a^i)(K^{i+1}a^{i+1}) \ldots (K^n a^n) z \vdash$$
$$\vdash (K^{i+1}a^{i+1})(K^i a^i) \ldots (K^n a^n) z,$$

и согласно $R1$ и $R2$ доказуема данная формула. Случай 4: тавтологиями являются формулы

$$(K^1 a^1)(K^2 a^2) \ldots (K^n a^n) z \vdash v^1$$
$$v^1 \vdash v^2, \ldots, v^m \vdash v,$$

где v^1 отличается от посылки лишь порядком двух кванторов, v^2 отличается от v^1 лишь порядком двух кванторов ..., v отличается от v^m лишь порядком двух кванторов ($m \geqslant 2$). Приведенные формулы суть базисные тавтологии, и согласно $MT1$ и S^s будет доказуема наша формула.

$MT7$. Если $x \vdash y$ есть тавтология, $x^* \vdash y^*$ есть ее бескванторная форма, x^* и y^* тождественны или одна из них может быть получена из другой путем замены вхождений вида $\sim \sim z$ на z, то $x \vdash y$ доказуема в S^s_{cq}.

Теорема $MT7$ доказывается путем пересмотра всех возможных соотношений структур x и y. Для x возможны только такие случаи, когда оно есть:

1) элементарное высказывание;
2) $(\forall a) z$
3) $(\exists a) z$
4) $z^1 \vee \ldots \vee z^n \, (n \geqslant 2)$
5) $z^1 \cdot \ldots \cdot z^n \, (n \geqslant 2)$
6) $\sim z$

Аналогично для y возможны только такие случаи, когда оно есть:

1) элементарное высказывание;

2) $(\forall b)\, v$
3) $(\exists b)\, v$
4) $v^1 \vee \ldots \vee v^m \, (m \geqslant 2)$
5) $v^1 \cdot \ldots \cdot v^m \, (m \geqslant 2)$
6) $\sim v$

Шестой случай в силу S^s и аксиомных и теоремных схем $A6$, $A7$, $T1$VII6, $T2$VII6, $T7$VII6, $T28$VII6, $T37$VII6 системы S^s_{cq} сводится к остальным. Комбинации указанных случаев для $x \vdash y$ будем обозначать символами $i \vdash k$, где $1 \leqslant i \leqslant 5$ и $1 \leqslant k \leqslant 5$.

Рассмотрим все возможные $i \vdash k$. Для $1 \vdash 1$ теорема верна в силу S^s. Случаи $1 \vdash 2$ и $1 \vdash 3$ сводятся к базисным. Случаи $1 \vdash 4$ и $1 \vdash 5$ исключаются. Случай $2 \vdash 1$ сводится к базисному. Для $2 \vdash 2$: если a есть b, то $2 \vdash 2$ есть тавтология лишь при условии, что $z \vdash v$ есть тавтология; если $z \vdash v$ доказуема, то $2 \vdash 2$ доказуема в силу $R1$; если a и b различны, то $2 \vdash 2$ может быть тавтологией лишь при условии, что $z \vdash (\forall b)\, v$ есть тавтология; а если $z \vdash (\forall b)\, v$ доказуема, то доказуема $2 \vdash 2$ в силу $A1$. Для $2 \vdash 3$ рассуждение аналогично предшествующему (дополнительно используется $T27$VII6). Случай $2 \vdash 4$ сводится к базисному или к случаю, рассмотренному в $MT4$. Случай $2 \vdash 5$ сводится к базисному или к случаю, рассмотренному в $MT2$. Случай $3 \vdash 1$ сводится к базисному. Для случая $3 \vdash 2$: если a и b одинаковы, то $3 \vdash 2$ может быть тавтологией лишь при условии, что a не входит свободно в z и $z \vdash (\forall b)\, v$ есть тавтология или a не входит свободно в v и $(\exists a)\, z \vdash v$ есть тавтология (или и то и другое); а если эти формулы доказуемы, то доказуема данная формула в силу $T17$VII6 или $T18$VII6; если a и b различны, то $3 \vdash 2$ может быть тавтологией лишь при условии, что $z \vdash (\forall b)\, v$ есть тавтология, и a не входит свободно в v; а если $z \vdash (\forall b)\, v$ доказуема, то при этом условии $3 \vdash 2$ доказуема в силу $T18VII6$. Для $3 \vdash 3$: если a и b одинаковы, то $3 \vdash 3$ есть тавтология лишь при условии, что $z \vdash v$ есть тавтология; а если $z \vdash v$ доказуема, то $3 \vdash 3$ доказуема в силу $R2$; если a и b различны, то $3 \vdash 3$ может быть тавтологией лишь при условии, что $(\exists a)\, z \vdash v$ есть тавтология; а если $(\exists a)\, z \vdash v$ доказуема, то $3 \vdash 3$ доказуема в силу $R2$. Случаи $3 \vdash 4$ и $3 \vdash 5$ сводятся к базисным и к случаям, рассмотренным в $MT2$—$MT5$. Случаи $4 \vdash 1$, $4 \vdash 5$, $5 \vdash 1$ и $5 \vdash 4$ исключаются. Случаи $4 \vdash 2$, $4 \vdash 3$, $4 \vdash 4$, $5 \vdash 2$, $5 \vdash 3$ и $5 \vdash 5$ сводятся к базисным и к случаям, рассмотренным в $MT2$—$MT5$.

Таким образом, система S^s_{cq} определяет исчерпывающим образом свойства кванторов для высказываний с операторами $\cdot$, $\vee$ и $\sim$ в смысле $MT7$.

§ 9. Проблема разрешимости

Однако полнота S^s_{cq}, о которой говорилось в предшествующем параграфе, еще не достаточна для решения проблемы разрешимости для S^s_{cq}. Для этого необходимо показать, что S^s_{cq} полна в смысле $MT6$, формулируемой ниже.

$D1$. Контрольной формой формулы $x \vdash y$ будем называть формулу, которая образуется из нее в результате таких операций:

1) если бескванторные формы формул $\vdash y$ и $\vdash \sim x$ недоказуемы в S^5, то $x \vdash y$ оставляется без изменения;

2) если бескванторная форма формулы $\vdash y$ или $\vdash \sim x$ оказуема в S^5, то все вхождения высказываний в $x \vdash y$, не содержащие кванторов, заменяются их дизъюнктивной нормальной формой в обычном смысле (см. гл. III, § 6); все вхождения вида $\sim \sim a$, где a есть элементарное высказывание, заменяются на a; если элементарное высказывание a входит в x (или в y) без отрицания и с отрицанием (и это — разные вхождения), то $\sim a$ повсюду заменяется

любым элементарным высказыванием, не входящим в $x \vdash y$; и так для всех пар элементарных высказываний и их отрицаний, совместно (но в разных местах) входящих в x (или в y).

*МТ*1. Если $x^* \vdash y^*$ есть контрольная форма формулы $x \vdash y$, и $x^* \vdash y^*$ при этом есть тавтология, то $x \vdash y$ есть тавтология (но не всегда наоборот).

Теорема *МТ*1 очевидна из способа построения контрольной формы: если b есть элементарное высказывание, подставляемое на место $\sim a$, и $x^* \vdash y^*$ есть тавтология, то это значит, что она имеет значение 1 для всех четырех комбинаций значений a и b, и в том числе — для двух комбинаций, которые получаются для a и $\sim a$. И так для всех заменяемых элементарных высказываний с отрицаниями.

*МТ*2. Если $x^* \vdash y^*$ есть контрольная форма формулы $x \vdash y$, а $x^{**} \vdash y^{**}$ есть бескванторная форма $x^* \vdash y^*$, то $\vdash y^{**}$ и $\vdash \sim x^{**}$ недоказуемы в S^5 (т. е. y^{**} не есть тавтология, а x^{**} не есть противоречие); недоказуемы в S^5 также $\vdash x^{**}$ и $\vdash \sim y^{**}$ (поскольку ни одно высказывание не входит в x^{**} и в y^{**} совместно с его отрицанием).

*МТ*3. Если $x \vdash y$ доказуема в S^s_{cq}, то доказуема и ее контрольная форма (это очевидно из вида аксиомных схем и правил S^s_{cq}).

*МТ*4. Если доказуема контрольная форма $x^* \vdash y^*$ данной формулы $x \vdash y$, то доказуема и сама $x \vdash y$ (поскольку доказательство $x^* \vdash y^*$ легко превратить в доказательство $x \vdash y$, заменив повсюду соответствующие элементарные высказывания на подходящие элементарные высказывания, входящие в $x \vdash y$).

*МТ*5. Пусть $x \vdash y$ есть тавтология, совпадающая со своей контрольной формой, а ее бескванторная форма $x^* \vdash y^*$ доказуема в S^s. В таком случае $x \vdash y$ доказуема в S^s_{cq}.

Доказательство *МТ*5. Возможны два случая: 1) $x^* \vdash y^*$ и $y^* \vdash x^*$ доказуемы обе, и тогда множества элементарных высказываний, входящих в x^* и y^* (а значит в x и y), совпадают; 2) $x^* \vdash y^*$ доказуема, а $y^* \vdash x^*$ нет.

Второй случай сводится к первому следующим образом: если $x \vdash y$ есть тавтология, то $x \vdash yx$ есть тавтология, и наоборот; если $x \vdash yx$ доказуема, то $x \vdash y$ доказуема; если $x^* \vdash y^*x^*$ доказуема, то $x \vdash yx$ доказуема, поскольку она есть тавтология, и доказуема $y^*x^* \vdash x^*$. Для первого же случая $MT5$ доказывается аналогично доказательству $MT7$ предшествующего параграфа. Только при этом необходимо принять во внимание то, что в силу указанного в $MT5$ ограничения на $x \vdash y$ в x и y не входят элементарные высказывания совместно со своими отрицаниями.

Рассмотрим случаи $i \vdash k$. Для $1 \vdash 1$ теорема верна в силу S^s. Для $1 \vdash 2$: $1 \vdash 2$ есть тавтология лишь при условии, что b не входит свободно в v; но если $x \vdash v$ доказуема при этом условии, то $1 \vdash 2$ доказуема в силу $T17VII6$. Для $1 \vdash 3$: если $x \vdash v$ доказуема, то $1 \vdash 3$ доказуема в силу $A2$. Для $1 \vdash 4$: $1 \vdash 4$ есть тавтология, если и только если найдется такое v^i ($i = 1, \ldots, m$), что $x \vdash v^i$ есть тавтология; а если $x \vdash v^i$ доказуема, то в силу S^s доказуема $1 \vdash 4$. Для $1 \vdash 5$: $1 \vdash 5$ есть тавтология, если и только если каждая из $x \vdash v^i$ ($i = 1, \ldots, m$) есть тавтология; а если все $x \vdash v^i$ доказуемы, то в силу S доказуема $1 \vdash 5$. Для $2 \vdash 1$: если $z \vdash x$ доказуема, то $2 \vdash 1$ доказуема в силу $A1$. Для $2 \vdash 2$ и $2 \vdash 3$ рассуждение аналогично таким же случаям в доказательстве $MT7$ предшествующего параграфа. Для $2 \vdash 4$: $2 \vdash 4$ есть тавтология при условии, что найдется такое w, что $z \vdash w$ есть тавтология, а $(\forall a)\, w \vdash (v^1 \vee \ldots \vee v^m)$ есть тавтология и относится к числу формул $2 \vdash 4$, рассмотренных в $MT7$ предшествующего параграфа; а если $z \vdash w$ и $(\forall a)\, w \vdash$ $\vdash (v^1 \vee \ldots \vee v^m)$ доказуемы, то доказуема $2 \vdash 4$ в силу S^s. Для $2 \vdash 5$: $2 \vdash 5$ есть тавтология при условии, что найдется такое w, что $z \vdash w$ есть тавтология, а $(\forall a)\, w \vdash v^1 \cdot \ldots \cdot v^m$ есть тавтология и относится к числу формул

$2 \vdash 5$, рассмотренных в $MT7$ предшествующего параграфа; а если $z \vdash w$ и $(\forall a)\, w \vdash v^1 \cdot \ldots \cdot v^m$ доказуемы, то доказуема $2 \vdash 5$ в силу S^s. Случай $3 \vdash 1$ сводится к базисному. Для $3 \vdash 2$ и $3 \vdash 3$ рассуждение аналогично таким же случаям в доказательстве $MT7$ предшествующего параграфа. Для $3 \vdash 4$ рассуждения аналогично случаю $2 \vdash 4$, а для $3 \vdash 5$ — случаю $2 \vdash 5$. Для $4 \vdash 1$: $4 \vdash 1$ есть тавтология при условии, что каждое из $z^i \vdash y$ есть тавтология; а если все $z^i \vdash y$ доказуемы, то $4 \vdash 1$ доказуема в силу $MT2$VII6 и S^s. Для $4 \vdash 2$: $4 \vdash 2$ есть тавтология при том условии, что найдется такое w, что $w \vdash v$ есть тавтология, а $z^1 \vee \ldots \vee z^n \vdash (\forall a)\, w$ есть тавтология и относится к числу формул $4 \vdash 2$, рассмотренных в $MT7$ предшествующего параграфа; а если $z^1 \vee \ldots$ $\ldots \vee z^n \vdash (\forall b)\, w$ и $w \vdash v$ доказуемы, то доказуема $4 \vdash 2$. Для $4 \vdash 3$ рассуждение аналогично $4 \vdash 2$. Для $4 \vdash 4$: если $4 \vdash 4$ не содержит кванторов, она доказуема в силу полноты S^s; если же она содержит кванторы, то она либо доказуема в силу S^s, либо недоказуема в силу S^s; в последнем случае она есть тавтология лишь при условии, если найдутся w^1 и w^2 такие, что $z^1 \vee \ldots \vee z^n \vdash w^1$ и $w^2 \vdash$ $\vdash v^1 \vee \ldots \vee v^m$ суть тавтологии и относятся к числу формул $4 \vdash k$ и $i \vdash 4$, рассмотренных в $MT7$ предшествующего параграфа, а $w^1 \vdash w^2$ есть тавтология; если последние три формулы доказуемы, то доказуема $4 \vdash 4$. Для $4 \vdash 5$ рассуждение аналогично (только нужно сослаться на $4 \vdash k$ и $i \vdash 5$ предшествующего параграфа). Для $5 \vdash 1$: $5 \vdash 1$ есть тавтология при условии, что среди $z^1, \ldots, z^n$ найдется z^i такое, что $z^i \vdash y$ есть тавтология; а если $z^i \vdash y$ доказуема, то доказуема $5 \vdash 1$ в силу S^s. Для $5 \vdash 2$, $5 \vdash 3$, $5 \vdash 4$ и $5 \vdash 5$ рассуждения аналогичны случаям $4 \vdash 2$, $4 \vdash 3$, $4 \vdash 5$ и $4 \vdash 4$.

Из $MT1$ — $MT5$ следует полнота S^s_{cq} в смысле следующей теоремы:

$MT6$. Пусть $x^* \vdash y^*$ есть контрольная форма формулы $x \vdash y$, а $x^{**} \vdash y^{**}$ есть бескванторная форма формулы

$x^* \vdash y^*$. Если $x^* \vdash y^*$ есть тавтология, а $x^{**} \vdash y^{**}$ доказуема в S^s, то $x \vdash y$ доказуема в S^s_{cq}.

Поскольку для любой данной формулы $x \vdash y$ можно (по самому способу приписывания значений входящим в нее высказываниям или по ее интерпретационной форме) установить, является она тавтологией или нет, благодаря $MT6$ имеется стандартная процедура, посредством которой для любой данной формулы $x \vdash y$ можно установить, доказуема она в S^s_{cq} или нет.

Пусть дана формула $x \vdash y$. Чтобы установить, доказуема она в S^s_{cq} или нет, надо осуществить следующие операции (а эти операции осуществимы для любой формулы):

1) образовать бескванторную форму $x^* \vdash y^*$ формулы $x \vdash y$ и установить доказуема она в S^s или нет; если $x^* \vdash y^*$ недоказуема в S^s, то $x \vdash y$ недоказуема в S^s_{cq}; если же $x^* \vdash y^*$ доказуема в S^s, то надо осуществить следующий шаг;

2) образовать контрольную форму $x^{**} \vdash y^{**}$ данной формулы $x \vdash y$ и установить, является она тавтологией или нет; если $x^{**} \vdash y^{**}$ есть тавтология, то $x \vdash y$ доказуема в S^s_{cq}; если $x^{**} \vdash y^{**}$ тавтологией не является, то $x \vdash y$ недоказуема в S^s_{cq}.

§ 10. Другие системы для классического случая

Другие системы теории кванторов для классического случая получаются путем присоединения к S^w, S^m, S^c, S^5 и S^6 таких же дополнений, какие сделаны выше к S^s. В системе S^5_{cq} принимаются еще дополнительные правило и определения.

$R1$. Если $\vdash x$, то $\vdash (\forall a)\, x$.

$D1$. Интерпретационной формой формулы $\vdash x$ называется формула, которая получается из нее так: если термин a входит свободно в x, то $\vdash x$ заменяется на $\vdash (\forall a)\, x$; и так для всех терминов, имеющих свободные вхождения в x; в остальном имеют силу пункты 2 и 3 определения $D2VII7$.

$D2$. Формула $\vdash x$ есть тавтология, если и только если x есть тавтология при любом числе отмеченных терминов для каждого термина, входящего в x.

В случае прямой интерпретации $D1$ и $D2$ излишни.

$MT1$. Если $\vdash x$ доказуема в S^5_{cq}, то она есть тавтология (теорема очевидна, поскольку если $\vdash x$ доказуема, то значит любая $x\ (ia)$ и их конъюнкция есть тавтология).

$MT2$. Формулы

$$\vdash (\forall a)(a \leftarrow b) \supset (c \leftarrow b)$$
$$\vdash (c \leftarrow b) \supset (\exists a)(a \leftarrow b)$$

недоказуемы в S^s_{cq} (поскольку они не тавтологии).

§ 11. Расширение S^s_{cq}

Расширим систему S^s_{cq}, заменив аксиомную схему $A5$ на такую:

A^*5. $(\exists a)x \vdash (\forall a)x$,

где a не входит свободно в x или $\vdash x$ доказуема в S^5.

Для такой S^{s*}_{cq} имеют силу теоремные схемы $T1$ — $T4$, в которых доказуема $\vdash x$ (т. е. x есть тавтология):

$T1$. $x \vdash (\forall a)x$

$T2$. $(\exists a)x \vdash x$

$T3$. $(\exists a) \sim x \vdash \sim x$

$T4$. $\sim x \vdash (\forall a) \sim x$

В случае $T3$ и $T4$ высказывание $\sim x$ есть противоречие.

$T5$. $x \vdash (\forall a)(x \vee \sim x)$

$T6$. $(\exists a)(\sim xx) \vdash x$

Формулы типа $T5$ и $T6$ недоказуемы в S^s_{cq}.

Систему S_{cq}^{s*} можно получить также, добавив к аксиомным схемам S_{cq}^{s} схему $A8{:}(\exists a) \sim ((x^1 \ldots x^n) \sim (x^1 \ldots x^n)) \vdash \vdash (\forall a) \sim ((x^1 \ldots x^n) \sim (x^1 \ldots x^n))$, где $n \geqslant 1$,

В расширенной таким образом S_{cq}^{s*} будет иметь силу утверждение:

*MT*1. Если $x \vdash y$ есть тавтология, а ее бескванторная форма доказуема в S^s, то $x \vdash y$ доказуема в S_{cq}^{s*}.

Доказательство *MT*1 отличается от доказательства *MT*5 из § 9 только двумя случаями, когда в бескванторной форме $x^* \vdash y^*$ формулы $x \vdash y$ высказывание y^* есть тавтология ($\vdash y^*$ доказуема в S^5) или x^* есть противоречие ($\vdash \sim x^*$ доказуема в S^5).

При рассмотрении $i \vdash k$ эти случаи охватываются посредством A^*5 и $T1$ — $T4$.

§ 12. Система S_{nq}^{s}

Система сильной теории кванторов для неклассического случая получается путем следующих дополнений к S_{cq}^{s} и модификаций последней.

Дополнение к алфавиту:

1) $\urcorner$ — внутреннее отрицание;

2) ? — оператор неопределенности.

Дополнение к определению высказывания: если a есть термин, а x есть высказывание, то $(\urcorner \forall a)\, x$, $(?\forall a)\, x$, $(\urcorner \exists a)\, x$ и $(?\, \exists a)\, x$ суть высказывания.

Дополнение к определению кванторной группы: $(\urcorner \forall a)$, $(?\, \forall a)$, $(\urcorner \exists a)$ и $(?\, \exists a)$ суть кванторные группы, если a есть термин.

В определение свободных и связанных терминов добавляется ссылка на кванторные группы $(\urcorner \forall a)$, $(?\, \forall a)$, $(\urcorner \exists a)$ и $(?\, \exists a)$.

Вместо аксиомных схем $A6$ и $A7$ системы S^s_{sq} принимаются такие аксиомные схемы:

$A^1 6.\ (\forall a)x \vdash (\neg \exists a) \sim x$

$A^2 6.\ (\neg \forall a)x \vdash (\exists a) \sim x$

$A^3 6.\ (?\ \forall a)x \vdash (?\ \exists a) \sim x$

$A^1 7.\ (\neg \exists a) \sim x \vdash (\forall a)x$

$A^2 7.\ (\exists a) \sim x \vdash (\neg \forall a)x$

$A^3 7.\ (?\ \exists a) \sim x \vdash (?\ \forall a)x$

Дополнительные аксиомные схемы:

$A^1 8.\ (\forall a)x \vdash \sim (\neg \forall a)x \sim (?\forall a)x$

$A^2 8.\ (\neg \forall a)x \vdash \sim (\forall a)x \sim (?\forall a)x$

$A^3 8.\ (?\forall a)x \vdash \sim (\forall a)x \sim (\neg \forall a)x$

$A^1 9.\ \sim (\neg \forall a)x \sim (?\forall a)x \vdash (\forall a)x$

$A^2 9.\ \sim (\forall a)x \sim (?\forall a)x \vdash (\neg \forall a)x$

$A^3 9.\ \sim (\forall a)x \sim (\neg \forall a)x \vdash (?\forall a)x$

$A10.\ (\neg \forall a)(xy) \vdash (\neg \forall a)x \vee (\neg \forall a)y$

$A11.\ (\neg \forall a)x \vee (\neg \forall a)y \vdash (\neg \forall a)(xy)$

$A12.\ (\neg \exists a)x \vee (\neg \exists a)y \vdash (\neg \exists a)(xy)$

§ 13. Непротиворечивость S^s_{nq}

$D1$. Бескванторная форма $x \vdash y$ есть формула, которая образуется из нее так:

1) все вхождения вида $(?\forall b)\ z$ и $(?\exists b)\ z$ заменяются соответственно на $\sim (\forall b)\ z \sim (\neg \forall b)\ z$ и $\sim (\exists b)\ z \cdot \sim (\neg \exists b)\ z$;

2) все вхождения вида $(\neg \forall b)\ z$ и $(\neg \exists b)\ z$ заменяются соответственно на $\sim (\forall b)\ z$ и $\sim (\exists b)z$;

3) все кванторные группы из полученной формулы исключаются.

Бескванторные формы формул A^16 — A^36, A^17 — A^37, A^18 — A^38, A^19 — A^39, $A10$, $A11$ и $A12$ суть соответственно

$$x \vdash \sim\sim x \qquad \sim x \sim\sim x \vdash \sim x \sim\sim x$$

$$\sim x \vdash \sim x \qquad \sim\sim x \sim (\sim x \sim\sim x) \vdash x$$

$$\sim x \sim\sim x \vdash \sim\sim x \sim\sim\sim x$$

$$\sim x \sim (\sim x \sim\sim x) \vdash \sim x$$

$$\sim\sim x \vdash x \qquad \sim x \sim\sim x \vdash \sim x \sim\sim x$$

$$\sim x \vdash \sim x \qquad \sim (xy) \vdash \sim x \vee \sim y$$

$$\sim\sim x \sim\sim\sim x \vdash \sim x \sim\sim x \qquad \sim x \vee \sim y \vdash \sim (xy)$$

$$x \vdash \sim\sim x \sim (\sim x \sim\sim x) \qquad \sim x \vee \sim y \vdash \sim (xy)$$

$$\sim x \vdash \sim x \sim (\sim x \sim\sim x)$$

Все эти формулы доказуемы в S^s. Правила вывода это свойство сохраняют. Тем самым доказана непротиворечивость S^s_{nq}.

§ 14. Некоторые следствия в S^s_{nq}

*MT*1. Если $x \vdash y$ доказуема в S^s_{nq}, то в y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x (эта теорема непарадоксальности очевидна из вида аксиомных схем и правил вывода S^s_{nq}).

*T*1. $(\exists a) x \dashv\vdash (\neg \forall a) \sim x$

*T*2. $(\neg \exists a) x \dashv\vdash (\forall a) \sim x$

*T*3. $(?\ \exists a) x \dashv\vdash (?\ \forall a) \sim x$

*T*4. $\sim (\forall a) x \dashv\vdash (\neg \forall a) x \vee (?\ \forall a) x$

*T*5. $\sim (\neg \forall a) x \dashv\vdash (\forall a) x \vee (?\ \forall a) x$

*T*6. $\sim (?\ \forall a) x \dashv\vdash (\forall a) x \vee (\neg \forall a) x$

*T*7. $(\exists a)(x \vee y) \dashv\vdash (\exists a) x \vee (\exists a) y$

*T*8. $(\forall a) x \vee (\forall a) y \vdash (\forall a)(x \vee y)$

§ 15. Главная семантическая интерпретация

Косвенная интерпретация отличается от таковой для S^s_{cq} следующими дополнениями и изменениями:

1) если x есть высказывание, то $\{x\}$ есть высказывание;

2) если одно из $\{x\}$ и $\{\sim x\}$ имеет значение 1, то другое имеет значение 0; если же одно из них имеет значение 0, то значение другого не зависит от первого;

3) интерпретационная форма формулы $x \vdash y$ получается так:

a) вхождения $(?\forall b)\, z$ и $(?\exists b)\, z$ заменяются соответственно на $\sim (\forall b)\, z \sim (\urcorner\, \forall b)\, z$ и $\sim (\exists b)\, z \sim (\urcorner\, \exists b)\, z$;

b) вхождения $(\urcorner\, \forall b)\, z$ и $(\urcorner\, \exists b)\, z$ заменяются соответственно на $(\exists b) \sim z$ и $(\forall b) \sim z$;

c) вхождения $(\forall b)\, z$ и $(\exists b)\, z$ заменяются соответственно на $\{z\,(1b)\} \cdot \ldots \cdot \{z\,(nb)\}$ и $\{z\,(1b)\} \vee \ldots \vee \{z\,(nb)\}$.

Прямая интерпретация отличается от таковой для S^s_{cq} тем, что принимаются такие дополнения:

1) $(?\, \mathrm{K}a)\, x$ равнозначно $\sim (\mathrm{K}a) x \sim (\urcorner\, \mathrm{K}a)\, x$, где K есть $\forall$ или $\exists$;

2) если одно из $(\mathrm{K}a)\, x$ и $(\urcorner\, \mathrm{K}a)\, x$ имеет значение 1, то другое имеет значение 0, если же одно из них имеет значение 0, то значение другого не зависит от первого;

3) соотношение $(\forall a) x$ и x аналогично S^s_{cq}; если возможно (невозможно) приписать x значение 1, то $(\exists a)\, x$ имеет значение 1 (значение 0); если $(\exists a)\, x$ имеет значение 0, то x имеет значение 0; если x имеет значение 0 (или $(\exists a)\, x$ значение 1), то значение $(\exists a)\, x$ (соответственно значение x) не зависит от x (от $(\exists a)\, x$).

*МТ*1. Если $x \vdash y$ доказуема в S^s_{nq}, то она есть тавтология.

*МТ*2. Формулы

$$\sim (\urcorner\, \forall a)\, x \vdash (\forall a)\, x \sim (\urcorner\, \exists a)\, x \vdash (\exists a)\, x$$

недоказуемы в S^s_{nq} (поскольку они не являются тавтологиями).

$MT3$. В S^s_{nq} недоказуемы формулы

$$\sim(\forall a)\sim x \vdash (\exists a)x \qquad \sim(\exists a)\sim x \vdash (\forall a)x$$

и т. п., поскольку не являются тавтологиями.

§ 16. Другие системы для неклассического случая

Другие системы теории кванторов для неклассического случая образуются аналогично таковым для классического случая.

В системе S^5_{nq} имеют силу теоремные схемы: (K есть $\forall$ или $\exists$):

$T1$. $\vdash \sim((\mathrm{K}a)x(\urcorner \mathrm{K}a)x)$

$T2$. $\vdash \sim((\mathrm{K}a)x(?\mathrm{K}a)x)$

$T3$. $\vdash \sim((\urcorner \mathrm{K}a)x(?\mathrm{K}a)x)$

$T4$. $\vdash (\mathrm{K}a)x \vee (\urcorner \mathrm{K}a)x \vee (?\mathrm{K}a)x$

$T5$. $\vdash (\mathrm{K}a)x : (\urcorner \mathrm{K}a)x : (?\mathrm{K}a)x$

$T6$. $\vdash (\mathrm{K}a)x : (\urcorner \mathrm{K}a)x : \sim(\mathrm{K}a)x \sim (\urcorner \mathrm{K}a)x$

$T7$. $\vdash (\mathrm{K}a)x : (?\mathrm{K}a)x : \sim(\mathrm{K}a)x \sim (?\mathrm{K}a)x$

$T8$. $\vdash (\urcorner \mathrm{K}a)x : (?\mathrm{K}a)x : \sim(\urcorner \mathrm{K}a)x \sim (?\mathrm{K}a)x$

$MT1$. Формулы вида

$$(\alpha \mathrm{K}a)x : (\beta \mathrm{K}a)x : \sim(\alpha \mathrm{K}a)x \sim (\beta \mathrm{K}a)x \vdash (\alpha \mathrm{K}a)x : (\beta \mathrm{K}a)x,$$

где K есть $\forall$ или $\exists$, а α и β различаются как $\urcorner$, ? или отсутствие обоих, в неклассических системах недоказуемы. Так что высказывания $(\alpha \mathrm{K}a)x$ и $(\beta\, \mathrm{K}a)x$ находятся в неклассическом отношении.

$MT2$. Если $\vdash x$ доказуема в S^s_{nq}, она есть тавтология.

$MT3$. Формулы

$$\vdash \sim(\urcorner \mathrm{K}a)x \supset (\mathrm{K}a)x$$

$$\vdash (\mathrm{K}a)x \vee (\urcorner \mathrm{K}a)x$$

недоказуемы в S^5_{nq} (поскольку они не тавтологии). Аналогично недоказуемы

$$\vdash (\text{K}a)x \vee (?\text{K}a)x \qquad \vdash (\neg\,\text{K}a)x \vee (?\text{K}a)x$$

§ 17. Другой вариант классического случая

Системы для классического случая можно получить из систем для неклассического случая, приняв дополнительную аксиомную схему:

$A^*13.\ \sim(\forall a)x \vdash (\neg\,\forall a)x$

При этом будут иметь силу теоремные схемы:

$T1.\ \vdash \sim(?\text{K}a)x$

$T2.\ (\forall a)x \dashv\vdash \sim(\exists a)\sim x$

$T3.\ \vdash (\text{K}a)x \vee (\neg\,\text{K}a)x.$

§ 18. Полнота S^s_{nq}

Проблему полноты S^s_{nq} и $S^{s^*}_{nq}$ мы не рассматриваем. Ограничимся лишь следующими замечаниями.

Определение базисной формулы для S^s_{nq} отличается от такового для S^s_{cq} тем, что перед символами K, K^1, K^2 и K^3 в скобках ставятся буквы, обозначающие наличие одного из $\neg$ и ? или отсутствие обоих (в любых комбинациях). Соответственно увеличивается и число случаев, которые надо рассмотреть при доказательстве полноты S^s_{nq} и $S^{s^*}_{nq}$ (а они, как мы предполагаем, полны соответственно в смысле $MT7$ восьмого параграфа и $MT6$ девятого параграфа).

Возможен другой путь решения проблемы. В аксиомных схемах вхождения вида $(\neg\forall b)\,z$ заменить на $(\exists b) \sim z$, $(?\ \forall b)\,z$ заменить на $\sim(\forall b)z \sim(\exists b) \sim z$, $(\neg\ \exists b)\,z$ заменить на $(\forall b) \sim z$, $(?\exists b)\,z$ заменить на $\sim(\exists b)\,z\cdot \sim(\forall b) \sim z$. Принять семантические правила: 1) если одно из $(\forall b)\,z$ и $(\exists b) \sim z$ имеет значение 1, то другое имеет значение 0; если же одно из них имеет значение 0, то значение другого не зависит от первого; 2) если $(\exists b)\, z$ имеет значение 0, то z имеет значение 0; если $(\exists b)\, z$ имеет значение 1, то значение z не зависит от $(\exists b)\, z$; если z имеет значение 0, значение $(\exists b) z$ не зависит от z; если z может принять значение 1, что $(\exists b)\, z$ принимает значение 1; отношение $(\forall b) z$ и z аналогично S^s_{cq}.

Аксиомные схемы $A^i 6 - A^i 9$, $A10 - A12$ примут такой вид:

1. $(\forall a)\, x \vdash (\forall a) \sim\sim x$
2. $(\exists a) \sim x \vdash (\exists a) \sim x$
3. $\sim (\forall a)\, x \sim (\exists a) \sim x \vdash \sim (\exists a)\, x \sim (\forall a) \sim x$
4. $(\forall a) \sim\sim x \vdash (\forall a)\, x$
5. $(\exists a) \sim x \vdash (\exists a) \sim x$
6. $\sim (\exists a)\, x \sim (\forall a) \sim x \vdash \sim (\forall a)\, x \sim (\exists a) \sim x$
7. $(\forall a)\, x \vdash \sim (\exists a) \sim x \sim (\sim (\forall a)\, x \sim (\exists a) \sim x)$
8. $(\exists a) \sim x \vdash \sim (\forall a)\, x \sim (\sim (\forall a)\, x \sim (\exists a) \sim x)$
9. $\sim (\forall a)\, x \sim (\exists a) \sim x \vdash \sim (\forall a)\, x \sim (\exists a) \sim x$
10. $\sim (\exists a) \sim x \sim (\sim (\forall a)\, x \sim (\exists a) \sim x) \vdash (\forall a)\, x$
11. $\sim (\forall a)\, x \sim (\sim (\forall a)\, x \sim (\exists a) \sim x) \vdash (\exists a) \sim x$
12. $\sim (\forall a)\, x \sim (\exists a) \sim x \vdash \sim (\forall a)\, x \sim (\exists a) \sim x$
13. $(\exists a) \sim (xy) \vdash (\exists a) \sim x \vee (\exists a) \sim y$
14. $(\exists a) \sim x \vee (\exists a) \sim y \vdash (\exists a) \sim (xy)$
15. $(\forall a) \sim x \vee (\forall a) \sim y \vdash (\forall a) \sim (xy)$]

Очевидно, схемы 1—4, 5, 6, 9, 12 отпадают как зависимые. Остальные присоединяются к схемам S^s_{cq} (или S^*_{cq}), без $A6$ и $A7$. И вопрос о полноте S^s_{nq} (или S^{s*}_{nq}) сводится к вопросу о полноте полученной системы.

§ 19. Правила подстановки

*МТ*1. Если формула $x \vdash y$, не содержащая кванторов, доказуема в S^s, то в S^s будет доказуема формула $z \vdash v$, которая образуется из $x \vdash y$ путем подстановки любого высказывания b на место элементерного высказывания a везде, где a входит в $x \vdash y$.

Справедливость *МТ*1 видна из следующего: если $x \vdash y$ есть аксиома, то и $z \vdash v$ есть аксиома; если $x \vdash y$ есть теорема, то доказательство ее легко превратить в доказательство $z \vdash v$, заменив повсюду a на b.

В S^s_{cq} доказуемы следующие теоремы (где c есть a, b, a^1, a^2, b^1 или b^2, а все a, b, a^1, a^2, b^1 и b^2 суть простые термины):

1. $(\forall c)(a \leftarrow b) \vdash (a \leftarrow b)$
2. $(a \leftarrow b) \vdash (\exists c)(a \leftarrow b)$
3. $(\forall c)(a \leftarrow b) \vdash \sim(\exists c) \sim (a \leftarrow b)$
4. $\sim(\exists c) \sim (a \leftarrow b) \vdash (\forall c)(a \leftarrow b)$
5. $(\forall c)(a^1 \leftarrow b)(\exists c)(a^2 \leftarrow b) \vdash (\exists c)((a^1 \leftarrow b)(a^2 \leftarrow b))$
6. $(\forall c)(a \leftarrow b^1)(\exists c)(a \leftarrow b^2) \vdash (\exists c)((a \leftarrow b^1)(a \leftarrow b^2))$
7. $(\forall c)((a^1 \leftarrow b) \vee (a^2 \leftarrow b)) \vdash (\forall c)(a^1 \leftarrow b) \vee (\exists c)(a^2 \leftarrow b)$
8. $(\forall c)((a \leftarrow b^1) \vee (a \leftarrow b^2)) \vdash (\forall c)(a \leftarrow b^1) \vee (\exists c)(a \leftarrow b^2)$
9. $(\forall c)(a \leftarrow b) \vdash (\forall c)(\forall c)(a \leftarrow b)$
10. $(\exists c)(a \leftarrow b) \vdash (\forall c)(\exists c)(a \leftarrow b)$
11. $(\exists c)(\exists c)(a \leftarrow b) \vdash (\exists c)(a \leftarrow b)$
12. $(\exists c)(\forall c)(a \leftarrow b) \vdash (\forall c)(a \leftarrow b)$
13. $(a \leftarrow b) \vdash (\forall a^1)(a \leftarrow b)$
14. $(\exists a^1)(a \leftarrow b) \vdash (a \leftarrow b)$

*МТ*2. Если $x \vdash y$ есть одна из *T*1 — *T*12, а $v \vdash z$ образуется из нее путем подстановки любого высказывания на место элементарного высказывания везде, где оно входит в $x \vdash y$, то $v \vdash z$ доказуемо в S^s_{cq}.

$MT3$. Если $x \vdash y$ есть одна из $T1 - T12$, а $v \vdash z$ образуется из нее путем подстановки любого предиката (субъекта) b на место простого предиката (субъекта) a везде, где a входит в $x \vdash y$, то $v \vdash z$ доказуема в S^s_{cq}.

$MT4$. Если $x \vdash y$ суть одна из $T13$ и $T14$, то в S^s_{cq} доказуема формула $v \vdash z$, аналогичная таковой в $MT2$, если выполнено условие: в высказывание, которое подставляется на место элементарного, не входит a^1.

$MT5$. Если $x \vdash y$ одна из $T13$ и $T14$, то в S^s_{cq} доказуема формула $v \vdash z$, аналогичная таковой в $MT3$, если выполнено условие: подставляемый предикат (субъект) не есть a^1 и не содержит a^1.

Теоремы $MT1 - MT5$ можно рассматривать как производные правила подстановки. Приняв в качестве аксиом $T1 - T14$ и аксиомы S^s (получаются заменой букв в аксиомных схемах S^s символами элементарных высказываний), а в качестве правил вывода правила S^s, дополнительные правила S^s_{cq} и $MT1 - MT5$, получим систему, эквивалентную S^s_{cq}. Аналогично можно сделать для прочих систем S^i_{cq} и S^i_{nq}.

§ 20. Расширения систем теории кванторов

Рассмотренные системы теории кванторов определяют свойства кванторов только в сочетании их друг с другом и с высказываниеобразующими операторами общей теории дедукции. Этим не исчерпываются свойства кванторов, и мы в дальнейшем приведем немало примеров в подтверждение этого утверждения. Кроме того, мы рассмотрели и будем рассматривать здесь лишь кванторы $\forall$ и $\exists$, которыми не исчерпываются все виды возможных кванторов (см. об этом [3]).

В частности, если принимаются во внимание термины вида $(a^1, \ldots, a^n)$, то к аксиомным схемам систем теории кванторов должны быть добавлены схемы A^*I:

$$(\mathrm{K}a)(\mathrm{K}b)x \dashv\vdash (\mathrm{K}(a, b))x$$

$$(\mathrm{K}a^1)(\mathrm{K}a^2)\ \dots\ (\mathrm{K}a^n)\,x \dashv\vdash (\mathrm{K}\,(a^1, a^2, \dots, a^n))\,x,$$

где K есть $\forall$ или $\exists$.

Можно ввести в рассмотрение кванторные группы вида

$$((\mathrm{K}^1a)\cdot(\mathrm{K}^2b)), \qquad ((\mathrm{K}^1a)\vee(\mathrm{K}^2b))$$

и т. п. Для них возможно принять аксиомные схемы A^* II:

$$(\alpha\,(\mathrm{K}^1a)\,\beta\,(\mathrm{K}^2b))\,x \dashv\vdash \alpha\,(\mathrm{K}^1a)\,x\,\beta\,(\mathrm{K}^2b)\,x$$

где α и β означают наличие n отрицаний $\sim$ $(n \geqslant 0)$:

$$(\alpha\,(\mathrm{K}^1a)\vee\beta\,(\mathrm{K}^2b))\,x \dashv\vdash \alpha\,(\mathrm{K}^1a)\,x\vee\beta\,(\mathrm{K}^2b)\,x$$

$$\sim(\alpha\,(\mathrm{K}^1a)\,\beta\,(\mathrm{K}^2b))\,x \dashv\vdash (\sim\alpha\,(\mathrm{K}^1a)\vee\sim\beta\,(\mathrm{K}^2b))\,x$$

$$\sim(\alpha\,(\mathrm{K}^1a)\vee\beta\,(\mathrm{K}^2b))\,x \dashv\vdash (\sim\alpha\,(\mathrm{K}^1a)\sim\beta\,(\mathrm{K}^2b))\,x$$

Аналогично для любого числа кванторных групп и для кванторных групп с внутренним отрицанием и оператором неопределенности.

§ 21. Кванторы и условные высказывания

При соединении теории кванторов и теории условных высказываний надо добавить определение высказывания в теории условных высказываний к определению высказывания в теории кванторов и принять следующие аксиомные схемы:

1. $(x \leftrightarrow y) \vdash (\forall a)\,(x \rightarrow y)$
2. $(\exists a)\,(x \urcorner\!\rightarrow y) \vdash (x \urcorner\!\leftrightarrow y)$
3. $(\exists a)\,(x? \rightarrow y) \vdash \sim(x \rightarrow y)$
4. $(x \rightarrow y) \dashv\vdash (x \rightarrow (\forall a)\,y)$
5. $(x \rightarrow y) \dashv\vdash ((\exists a)\,x \rightarrow y)$

В классическом случае (в зависимости от способа построения систем) либо принимается схема

$$(\exists a) \sim (x \rightarrow y) \vdash \sim (x \rightarrow y),$$

либо она доказывается.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ТЕОРИЯ ПРЕДИКАЦИИ

§ 1. Системы S_p^i

Системы S_p^i теории предикации (сформулированы в [3—5]) получаются благодаря таким дополнениям к системам общей теории дедукции, а также к другим системам, которые рассмотрены или будут рассмотрены ниже.

Дополнение к алфавиту:

1) $\rceil$ и ? суть операторы соответственно внутреннего отрицания и неопределенности;

2) $\leftarrow$ — оператор предикативности.

*D*1. Дополнение к определению высказывания: если a есть энместный субъект, а b есть соответственно энместный предикат, то $(a \leftarrow b)$, $(a \rceil \leftarrow b)$ и $(a? \leftarrow b)$ суть высказывания.

*D*2. Высказывания вида $(a \leftarrow b)$ являются элементарными для теории предикации.

Высказывание $(a \leftarrow b)$ входит в $(a \rceil \leftarrow b)$ и $(a? \leftarrow b)$.

Дополнительные аксиомные схемы:

*A*1. $(a \leftarrow b) \vdash \sim (a \rceil \leftarrow b) \sim (a? \leftarrow b)$

*A*2. $\sim (a \rceil \leftarrow b) \sim (a? \leftarrow b) \vdash (a \leftarrow b)$

*A*3. $(a \rceil \leftarrow b) \vdash \sim (a \leftarrow b) \sim (a? \leftarrow b)$

*A*4. $\sim (a \leftarrow b) \sim (a? \leftarrow b) \vdash (a \rceil \leftarrow b)$

*A*5. $(a? \leftarrow b) \vdash \sim (a \leftarrow b) \sim (a \rceil \leftarrow b)$

*A*4. $\sim (a \leftarrow b) \sim (a \rceil \leftarrow b) \vdash (a? \leftarrow b)$

*MT*1. Если $x \vdash y$ доказуема в $S_p^{\bar{s}}$, то в y не входят элементарные для теории предикации высказывания, отсутствующие в x (теорема очевидна из вида *A*1 — *A*6).

Для S_p^s имеют силу теоремные схемы:

$T1. \sim(a \leftarrow b) \dashv\vdash (a \urcorner \leftarrow b) \vee (a\,? \leftarrow b)$

$T2. \sim(a \urcorner \leftarrow b) \dashv\vdash (a \leftarrow b) \vee (a\,? \leftarrow b)$

$T3. \sim(a\,? \leftarrow b) \dashv\vdash (a \leftarrow b) \vee (a \urcorner \leftarrow b)$

$T4. (a \leftarrow b) \vdash \sim(a \urcorner \leftarrow b)$

$T5. (a \leftarrow b) \vdash \sim(a\,? \leftarrow b)$

$T6. (a \urcorner \leftarrow b) \vdash \sim(a \leftarrow b)$

$T7. (a \urcorner \leftarrow b) \vdash \sim(a\,? \leftarrow b)$

Для S_p^5 имеют силу теоремные схемы:

$T6. \vdash (a \leftarrow b) : (a \urcorner \leftarrow b) : (a\,? \leftarrow b)$

$T7. \vdash (a \leftarrow b) \vee (a \urcorner \leftarrow b) \vee (a\,? \leftarrow b)$

$T8. \vdash \sim((a \leftarrow b)(a \urcorner \leftarrow b))$

$T9. \vdash \sim((a \leftarrow b)(a\,? \leftarrow b))$

$T10. \vdash \sim((a \urcorner \leftarrow b)(a\,? \leftarrow b))$

§ 2. Интерпретация

Примем следующую интерпретацию:

1) если одну из $(a \leftarrow b)$ и $(a \urcorner \leftarrow b)$ приписывается значение 1, то другому из них приписывается значение 0;

2) если одному из $(a \leftarrow b)$ и $(a \urcorner \leftarrow b)$ приписывается значение 0, то значение другого остается неопределенным (независимым от значения первого);

3) $(a? \leftarrow b)$ равнозначно $\sim(a \leftarrow b) \sim(a \urcorner \leftarrow b)$.

Равносильной с приведенной является следующая интерпретация:

1) $(a \urcorner \leftarrow b)$ равнозначно $\sim(a \leftarrow b)\,x$, где x есть элементарное высказывание, не входящее в формулу, в которую входит $(a \urcorner \leftarrow b)$ (и значение которой выясняется);

2) $(a? \leftarrow b)$ равнозначно $\sim(a \leftarrow b) \sim(a \urcorner \leftarrow b)$.

Равносильность этих интерпретаций видна из следующего: если $(a \leftarrow b)$ имеет значение 1, то $\sim(a \leftarrow b)$ имеет значение 0, и $\sim (a \leftarrow b)\, x$ имеет значение 0 независимо от значения x; если $\sim (a \leftarrow b)\, x$ имеет значение 1, то $\sim (a \leftarrow b)$ имеет значение 1, и $(a \leftarrow b)$ имеет значение 0; если $(a \leftarrow b)$ имеет значение 0, то $\sim (a \leftarrow b)$ имеет значение 1, и значение $\sim (a \leftarrow b)\, x$ оказывается зависимым исключительно от x, т. е. $\sim (a \leftarrow b)\, x$ может принять как значение 1, так и значение 0; если $\sim (a \leftarrow b)\, x$ имеет значение 0, то либо $\sim (a \leftarrow b)$ имеет значение 0, либо $\sim (a \leftarrow b)$ имеет значение 1 и x имеет значение 0, либо обе $\sim (a \leftarrow b)$ и x имеют значение 0; так что $(a \leftarrow b)$ может принять как значение 1, так и значение 0.

*MT*1. Все формулы $x \vdash y$ и $\vdash x$, доказуемые в системах S_p^i, суть тавтологии (поскольку все $A1 - A6$ суть тавтологии).

*MT*2. Формула $\sim (a \urcorner \leftarrow b) \vdash (a \leftarrow b)$ в S_p^s недоказуема (поскольку не является тавтологией). Формулы $\vdash (a \leftarrow b) \vee (a \urcorner \leftarrow b)$, $\vdash (a \leftarrow b) \vee (a? \leftarrow b)$, $\vdash (a \urcorner \leftarrow b) \vee (a? \leftarrow b)$ в S_p^5 недоказуемы (поскольку не являются тавтологиями).

*MT*3. Высказывания $(a \leftarrow b)$ и $(a \urcorner \leftarrow b)$ находятся в неклассическом отношении. Аналогично — пары $(a \leftarrow b)$ и $(a? \leftarrow b)$, $(a \urcorner \leftarrow b)$ и $(a? \leftarrow b)$.

§ 3. Классический случай

В классическом случае теория предикации излишня, поскольку отрицания совпадают, а неопределенность исключается. Аксиомные схемы $A1 - A6$ принимают вид $(a \leftarrow b) \dashv\vdash \sim\sim (a \leftarrow b)$ и $\sim (a \leftarrow b) \dashv\vdash \sim (a \leftarrow b)$. Тот же эффект получится, если $A1 - A6$ добавить аксиомную схему $(a \urcorner \leftarrow b) \vdash \sim (a \leftarrow b)$.

§ 4. Полнота

*D*1. Базисные формулы теории предикации суть формулы вида $a \vdash b$, $ab \vdash c$, $c \vdash ab$, $a \vee b \vdash c$, $c \vdash a \vee b$

и $\vdash z$, где a, b и c суть элементарные для теории предикации высказывания или их отрицания (внешние и внутренние) и неопределенные формы, а z есть высказывание, образованное исключительно из таких высказываний и операторов общей теории дедукции.

$MT1$. Если базисная формула $x \vdash y$ есть тавтология, и в x и y входят одинаковые элементарные для теории предикации высказывания, то $x \vdash y$ доказуема в S_p^s. Если базисная формула $\vdash z$ есть тавтология, то она доказуема в S_p^5. Теорема доказывается путем пересмотра всех случаев базисных формул.

§ 5. Дедуктивно связанные предикаты

$D1$. Предикаты b и c дедуктивно связаны, если и только если доказуема хотя бы одна из формул $(a \leftarrow b) \vdash (a \leftarrow c)$ и $(a \leftarrow c) \vdash (a \leftarrow b)$.

$D2$. Предикат b дедуктивно включается в c, если и только если доказуема $(a \leftarrow c) \vdash (a \leftarrow b)$.

$D3$. Предикаты b и c дедуктивно эквивалентны, если и только если доказуемы обе $(a \leftarrow b) \vdash (a \leftarrow c)$ и $(a \leftarrow c) \vdash (a \leftarrow b)$.

$D4$. Предикат b дедуктивно сильнее предиката c, если и только если доказуема $(a \leftarrow b) \vdash (a \leftarrow c)$ и недоказуема $(a \leftarrow c) \vdash (a \leftarrow b)$.

$D5$. Предикат b дедуктивно категорически сильнее предиката c, если и только если доказуемы $(a \leftarrow b) \vdash (a \leftarrow c)$, $(a \urcorner \leftarrow c) \vdash (a \urcorner \leftarrow b)$ и $(a? \leftarrow c) \vdash \sim (a \leftarrow b)$.

В классическом случае в $D5$ достаточно принять $(a \leftarrow b) \vdash (a \leftarrow c)$ и $\sim (a \leftarrow c) \vdash \sim (a \leftarrow b)$.

§ 6. Теория предикации и кванторы

Как уже отмечалось, в S_{nq}^s недоказуемы формулы

$$\sim (\forall a) \sim x \dashv\vdash (\exists a)\, x \qquad \sim (\exists a) \sim x \dashv\vdash (\forall a)\, x$$

и т. п. Но в теории кванторов, расширенной за счет дополнения, изложенного в § 1, имеют силу следующие теоремные схемы:

$T1.\ \sim(\forall a)\sim(a \leftarrow b) \vdash$
$\vdash (\urcorner\,\forall a)\sim(a \leftarrow b) \vee (?\forall a)\sim(a \leftarrow b)$

$T2.\ \sim(\forall a)\sim(a \leftarrow b) \vdash (\urcorner\,\forall a)((a\urcorner \leftarrow b) \vee$
$\vee (a? \leftarrow b)) \vee (?\forall a)((a\urcorner \leftarrow b) \vee (a? \leftarrow b))$

$T3.\ (\forall a)(a \leftarrow b) \vdash (\urcorner\,\exists a)(a\urcorner \leftarrow b)(\urcorner\,\exists a)(a? \leftarrow b)$

$T4.\ (\urcorner\,\forall a)(a \leftarrow b) \vdash (\exists a)(a\urcorner \leftarrow b) \vee (\exists a)(a? \leftarrow b)$

$T5.\ (\urcorner\,\forall a)(a\urcorner \leftarrow b) \vdash (\exists a)(a \leftarrow b) \vee (\exists a)(a? \leftarrow b)$

$T6.\ (\urcorner\,\exists a)(a \leftarrow b) \vdash (\forall a)(a\urcorner \leftarrow b) \vee (\exists a)(a? \leftarrow b)$

§ 7. Расширения теории предикации

Теория предикации может быть расширена, если учесть строение субъектов и предикатов. Это мы покажем ниже. Здесь мы хотим обратить внимание читателя на следующее обстоятельство, которое в какой-то мере оправдывает употребление названия «комплексная логика» применительно к излагаемой концепции. Построение логики есть процесс, протекающий в различных планах («измерениях»), так что построить логику как одну систему по образцу S^s, S^s_{cq} и т. п. (в одной «плоскости») невозможно. Кроме того, логические системы остаются всегда незамкнутыми в том смысле, что определенные в них операторы остаются неопределенными относительно их комбинаций с другими возможными операторами, отсутствующими в этих системах.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ТЕОРИЯ ТЕРМИНОВ

§ 1. Термины

Системы теории терминов S_t^i образуются благодаря излагаемым в этой главе дополнениям к ранее рассмотренным системам. Эти системы рассматривались в [4—5]. Излагаемая ниже теория терминов есть лишь набросок и ориентир для отыскания возможной теории, которая может быть обработана в соответствии с правилами логической техники.

Алфавит:

1) простые предикаты и субъекты;

2) sc — универсальный субъект («объект»);

3) pc — универсальный предикат («признак»);

4) $\rightarrow$ — двухместный предикат включения одного термина в другой по значению.

$D1$. Предикат:

1) простые предикаты суть предикаты;

2) если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 2)$ суть предикаты, то $(a^1 \cdot \ldots \ldots \cdot a^n)$, $(a^1 \vee \ldots \vee a^n)$, $(\cdot\ (a^1, \ldots, a^n))$, $(\vee\ (a^1, \ldots, a^n))$ суть предикаты;

3) если a есть предикат, то $\sim a$ и $\bar{a}$ суть предикаты;

4) если x есть высказывание, а a — предикат, то $a \downarrow x$ есть предикат;

5) если x есть высказывание, то $x \downarrow$ есть предикат;

6) нечто есть предикат лишь в силу 1—5.

Символ $\rightarrow$ мы не включили в $D1$ потому, что это простой предикат, и он охвачен пунктом 1.

$D2$. Субъект:

1) простые субъекты суть субъекты;

2) если $a^1, \ldots, a^n$ ($n \geqslant 2$) суть субъекты, то $(a^1 \cdot \ldots \cdot a^n)$, $(a^1 \vee \ldots \vee a^n)$, $(\cdot\ (a^1, \ldots, a^n))$, $(\vee\ (a^1, \ldots, a^n))$ и $(a^1, \ldots, a^n)$ суть субъекты;

3) если a есть субъект, то $\sim a$ и $\tilde{a}$ суть субъекты;

4) если x есть высказывание, а a есть субъект, то $a \downarrow x$ есть субъект;

5) если x есть высказывание, то $\downarrow x$ есть субъект;

6) если a есть субъект или предикат, то $[a]$ есть субъект;

7) нечто есть субъект лишь в силу 1—6.

*D*3. Субъекты и предикаты (и только они) суть термины.

Определения *D*1 и *D*2 отнюдь не исчерпывают всех возможных субъектов и предикатов. Они означают только то, что в данной главе будут рассматриваться только такие термины. В следующей главе, например, мы будем рассматривать термины, не охватываемые определением *D*2. Как «читаются» введенные в D_1 и D_2 термины, об этом сказано во введении. Приведем лишь несколько поясняющих примеров. Пример для различия a и $\sim a$: «стол» — «не-стол» («не являющийся столом», «не называемый столом»). Примеры для различия a и $\tilde{a}$: «знание» — «незнание», «умение» — «неумение», «возможность» — «невозможность» и т. п. Термином (ab) может обозначаться не всякий предмет, называемый a, и не всякий предмет, называемый b, а лишь такой, который может быть назван и a и b. Например, не всякий писатель и не всякий художник есть писатель и художник (писатель — художник) одновременно. Термин $(\cdot\ (a, b))$ имеет смысл не сам по себе, а лишь как часть высказывания. Так, в предложении «Писатель и художник создает духовные ценности» имеется в виду то, что как писатель, так и художник создает духовные ценности (т. е. каждый из них). Указать предмет, который обозначает термин $(\cdot\ (a, b))$ независимо от его роли в высказываниях, невозможно. Это — термин иного типа, чем (ab). Аналогично для соотношения терминов $(a \vee b)$ и $(\vee(a, b))$. На смешении терминов рассматриваемого типа безируются многочисленные недоразумения и затруднения как в операциях с языком, так и в исследующей эти операции логике.

Высказывание о том, что термин a включается по значению в термин b, будет иметь вид

$$([a], [b]) \leftarrow (\rightharpoondown).$$

В дальнейшем для упрощения будем квадратные скобки опускать, полагая, что в формулах с предикатом $\rightharpoondown$ они всегда предполагаются, и будем вместо приведенного выше символа употреблять более наглядный символ

$$a \rightharpoondown b.$$

Знак конъюнкции будем опускать на тех же основаниях, что и в общей теории дедукции.

Символ $a \rightharpoondown b$ можно пояснить так: каждый предмет, обозначаемый термином b, может быть обозначен также и термином a. Например, таково отношение пар терминов «Геометрическая фигура» и «Треугольник», «Равносторонний четырехугольник» и «Ромб». Символ $a \rightharpoondown b$ читается так же, как «b есть a». Так что теорию терминов можно рассматривать как теорию высказываний со знаком «есть».

$D4$. Будем в качестве сокращения для $(a \rightharpoondown b).(b \rightharpoondown a)$ употреблять символ $a \rightleftharpoons b$.

§ 2. Общая теория терминов S_t^1

Аксиомные схемы AI:

1. $\vdash \sim\sim a \rightleftharpoons a$
2. $\vdash a \rightharpoondown ab$
3. $\vdash ab \rightharpoondown ba$
4. $\vdash (a^1 a^2 \ldots a^n) \rightleftharpoons b,$

где b отличается от $a^1a^2...a^n$ лишь какой-то расстановкой скобок, удовлетворяющей $D1$ и $D2$.

5. $\vdash \sim(ab) \rightleftharpoons (\sim a \vee \sim b)$

6. $\vdash (a \rightarrow b) \rightarrow (\sim b \rightarrow \sim a)$

7. $\vdash (a \mathrel{\underline{\succ}} b)(b \rightarrow c) \rightarrow (a \mathrel{\underline{\succ}} c)$

8. $\vdash (a \mathrel{\underline{\succ}} c)(b \rightarrow c) \rightarrow (ab \mathrel{\underline{\succ}} c)$

9. $\vdash (a \rightarrow b) \rightarrow \sim(\sim a \rightarrow b)$

10. $\vdash (\tilde{\tilde{a}} \rightleftharpoons a)$

11. $\vdash (\widetilde{ab}) \rightleftharpoons (\tilde{a} \vee \tilde{b})$

12. $\vdash (\sim a \rightarrow \tilde{a})$

Некоторые теоремные схемы:

$T1.\ \vdash a \vee b \mathrel{\underline{\succ}} a$

$T2.\ \vdash a \mathrel{\underline{\succ}} a$

$T3.\ \vdash aa \mathrel{\underline{\succ}} a$

$T4.\ \vdash (ad \mathrel{\underline{\succ}} c) \rightarrow (a \mathrel{\underline{\succ}} c)$

$T5.\ \vdash (a \mathrel{\underline{\succ}} b)(a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b \vee c)$

$T6.\ \vdash (a \mathrel{\underline{\succ}} b \vee c) \rightarrow (a \rightarrow bc)$

$T7.\ \vdash a \vee b \rightarrow b \vee a$

$T8.\ \vdash (a \mathrel{\underline{\succ}} b)(c \mathrel{\underline{\succ}} d) \rightarrow (a \vee c \mathrel{\underline{\succ}} b \vee d)$

$T9.\ \vdash a \mathrel{\underline{\succ}} a \vee \sim bb$

$MT1$. Если доказуема $\vdash (a \rightarrow b)$, то в a и b входит по крайней мере один одинаковый термин.

Справедливость $MT1$ видна из следующего рассуждения. Аксиомы 1—5 удовлетворяют $MT1$. Из доказуемых формул вида $\vdash (a \rightarrow ab)$ в соответствии с аксиомами 7 можно получить лишь формулы вида $\vdash (a \mathrel{\underline{\succ}} ab^1 \ldots b^n)$, а в соответствии с аксиомами 6 — лишь формулы вида $\vdash (\sim(ab^1 \ldots b^n) \mathrel{\underline{\succ}} \sim a)$, удовлетворяющие $MT1$. Формулы, получающиеся в соответствии с аксиомами 8, явно удовлетворяют $MT1$.

Будем приписывать терминам значения 1 и 0 и будем считать, что $a \rightharpoonup b$ равнозначна $b \supset a$, где a и b рассматриваются как высказывания.

$MT2$. Все доказуемые в S_t^1 формулы суть тавтологии. Справедливость теоремы легко усматривается из обзора аксиомных схем.

$MT3$. Если $\vdash (a \rightharpoonup b)$ есть тавтология такая, что в a и b входит хотя бы один одинаковый термин, то она доказуема.

Справедливость $MT3$ усматривается из того, что каждой доказуемой в классической пропозициональной логике формуле $b \supset a$ (а значит и каждой тавтологии $b \supset a$) соответствует доказуемая в нашей системе формула $\vdash (a \rightharpoonup b)$.

Аксиомные схемы AII:

1. $\vdash (a^1, a^2, \ldots, a^n) \rightleftharpoons b$,

где b отличается от $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ лишь какой-то расстановкой скобок.

2. $\vdash (a \rightharpoonup b)(c \rightharpoonup d) \to ((a, c) \rightharpoonup (b, d))$
3. $\vdash ((a, c) \rightharpoonup (b, d)) \to (a \rightharpoonup b)(c \rightharpoonup d)$

Аксиомные схемы $AIII$:

1. $\vdash (\forall a)\, x\, (\exists b) \sim x \to \sim (a \rightharpoonup b)$
2. $\vdash (a \rightleftharpoons b) \to (x \to y)$,

где y образуется из x путем замены вхождения a в x на b.

§ 3. Теория субъектно-предикатных терминов

Система S_t^2 получается путем следующего расширения S_t^1.

Аксиомные схемы AI:

1. $(a \rightharpoonup b)\,(\forall a)\,(a\alpha \leftarrow c) \vdash (\forall b)\,(b\alpha \leftarrow c)$
2. $(a \rightharpoonup b)\,(\exists b)\,(b\alpha \leftarrow c) \vdash (\exists a)\,(a\alpha \leftarrow c)$
3. $(a \rightharpoonup b)\,(c \leftarrow b) \vdash (c \leftarrow a)$
4. $(a \rightharpoonup b)\,(c \urcorner \leftarrow a) \vdash (c \urcorner \leftarrow b)$
5. $(a \rightharpoonup b)\,(c? \leftarrow a) \vdash \sim (c \leftarrow b)$

Некоторые следствия:

$T1.$ $\vdash (a \leftarrow (bc)) \to (a \leftarrow b)\,(a \leftarrow c)$

$T2.$ $\vdash (a \urcorner \leftarrow b) \vee (a \urcorner \leftarrow c) \to (a \urcorner \leftarrow bc)$

$T3.$ $\vdash (a \leftarrow b) \vee (a \leftarrow c) \to (a \leftarrow (b \vee c))$

$T4.$ $\vdash (a \urcorner \leftarrow (b \vee c)) \to (a \urcorner \leftarrow b)\,(a \urcorner \leftarrow c)$

$T5.$ $\vdash \sim (a \leftarrow b) \to \sim (a \leftarrow bc)$

$T6.$ $\vdash \sim (a \leftarrow (b \vee c)) \to \sim (a \leftarrow b)$

Аксиомные схемы AII:

1. $\vdash \sim (a \leftarrow (\sim bb))$
2. $\vdash (a \leftarrow b) \vee (a \leftarrow \sim b)$

Аксиомные схемы AIII:

1. $(a \leftarrow (\cdot(b,\ c))) \dashv\vdash (a \leftarrow b)\,(a \leftarrow c)$
2. $((\cdot(a,\ b)) \leftarrow c) \dashv\vdash (a \leftarrow c)\,(b \leftarrow c)$
3. $(a \leftarrow (\vee (b,\ c))) \dashv\vdash (a \leftarrow b) \vee (a \leftarrow c)$
4. $((\vee (a,\ b)) \leftarrow c) \dashv\vdash (a \leftarrow c) \vee (b \leftarrow c)$
5. $(a \leftarrow \tilde{b}) \dashv\vdash (a \urcorner \leftarrow b)$

   $(a \urcorner \leftarrow \tilde{b}) \dashv\vdash (a \leftarrow b)$

   $(a? \leftarrow \tilde{b}) \dashv\vdash (a? \leftarrow b)$
6. $(\forall a)\,(a \leftarrow c)\,(\forall b)\,(b \leftarrow c) \vdash (\forall\,(ab))\,((ab) \leftarrow c)$
7. $(\urcorner\,\forall\,(ab))\,((ab) \leftarrow c) \vdash (\urcorner\,\forall a)\,(a \leftarrow c) \vee (\urcorner\,\forall b)$ $(b \leftarrow c)$
8. $(\exists\,(ab))\,((ab) \leftarrow c) \vdash (\exists a)\,(a \leftarrow c)\,(\exists b)\,(b \leftarrow c)$

9. $(\neg\exists a)(a \leftarrow c) \vee (\neg\exists b)(b \leftarrow c) \vdash (\neg\exists(ab))$ $((ab \leftarrow c))$

10. $(\exists a)(a \leftarrow c) \vee (\exists b)(b \leftarrow c) \dashv\vdash (\exists(a \vee b))((a \vee$ $\vee b) \leftarrow c)$

11. $(\neg\exists a)(a \leftarrow c)(\neg\exists b)(b \leftarrow c) \dashv\vdash (\neg\exists(a \vee b))$ $((a \vee b) \leftarrow c)$

12. $(\forall a)(a \leftarrow c) \vee (\forall b)(b \leftarrow c) \vdash (\forall(a \vee b))((a \vee b) \leftarrow c)$

13. $(\neg\forall(a \vee b))((a \vee b) \leftarrow c) \vdash (\neg\forall a)(a \leftarrow c) \cdot$ $\cdot (\neg\forall b)(b \leftarrow c)$

14. $(\forall a)(a \leftarrow c)(\exists b)(b \leftarrow c) \vdash (\exists(ab))((ab) \leftarrow c)$

15. $(\neg\exists(ab))((ab) \leftarrow c) \vdash (\neg\forall a)(a \leftarrow c) \vee (\neg\exists b)$ $(b \leftarrow c)$

Некоторые следствия:

$T7.\ \vdash \sim (a \leftarrow (b\tilde{b}))$

$T8.\ (a \leftarrow b) \vdash \sim (a \leftarrow \tilde{b})$

$T9.\ (a \leftarrow \tilde{b}) \vdash \sim (a \leftarrow b)$

$T10.\ (a \leftarrow \tilde{b}) \vdash (a \leftarrow \sim b)$

$T11.\ \vdash \sim ((a \leftarrow b)(a \leftarrow \tilde{b}))$

Утверждения, аналогичные $T8$ и $T11$, для $\sim b$ неприемлемы: предмет a может иметь признак, обозначаемый термином b, и другой признак, который не обозначается термином b. И оно недоказуемо в нашей системе. Это, кстати сказать, одна из причин того, почему нельзя принимать

$$\vdash (a \leftarrow b)(a \leftarrow c) \rightarrow (a \leftarrow (bc)).$$

Приняв такое утверждение, мы должны были бы принять

$$\vdash (a \leftarrow b)(a \leftarrow \sim b) \rightarrow (a \leftarrow (\sim bb))$$

и согласно AII1 и S^5 принять

$$\vdash \sim ((a \leftarrow b)(a \leftarrow \sim b)),$$

что не соответствует принятому смыслу термина $\sim b$.

Аксиомные схемы AIV:

1. $\vdash (a \downarrow x) \downarrow y \rightleftharpoons (a \downarrow y) \downarrow x$
2. $\vdash x \rightarrow (a \rightharpoondown a \downarrow x)$
3. $\vdash (a \downarrow x \rightharpoondown a)$,

где a не входит свободно в x или $\vdash x$ доказуема.

4. $(\downarrow x \rightleftharpoons \downarrow y) \dashv\vdash (x \downarrow \rightleftharpoons y \downarrow)$
5. $\vdash (\downarrow x \rightleftharpoons \downarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$
6. $\vdash (x \rightarrow (a \leftarrow (x \downarrow))$
7. $\vdash (a \leftarrow (x \downarrow)) \rightarrow x$
8. $\vdash (a \downarrow x) \leftarrow (x \downarrow)$
9. $\vdash (\downarrow \tilde{x}) \rightleftharpoons (\downarrow \sim x)$

$D1$. $a\alpha \downarrow b$ есть сокращение для $a \downarrow (a\,\alpha \leftarrow b)$, $b\alpha \downarrow a$ есть сокращение для $b \downarrow (a\,\alpha \leftarrow b)$, где α означает наличие или отсутствие $\sim$, $\urcorner$ или ?.

Аксиомные схемы AV:

1. $\vdash \sim a \rightharpoondown (b \urcorner \downarrow (pc \downarrow a))$
2. $\vdash \sim a \rightarrow (b? \downarrow (pc \downarrow a))$
3. $\vdash \sim a \rightharpoondown (b \downarrow (pc \urcorner \downarrow a))$
4. $\vdash \sim a \rightharpoondown (b \downarrow (pc? \downarrow a))$
5. $\vdash (a\alpha \leftarrow c)(b\beta \leftarrow c) \rightarrow \sim (a \rightharpoondown b)$
6. $\vdash (a\alpha \leftarrow b)(a\beta \leftarrow c) \rightarrow \sim (b \rightharpoondown c)$

где α и β различны (в 5 и 6).

Аксиомные схемы AVI:

1. $\vdash (pc \hookrightarrow a)$,

где a есть предикат.

2. $\vdash (sc \rightharpoondown a)$,

где a есть субъект.

3. $\vdash sc \downarrow (pc \downarrow a) \rightharpoondown a$
4. $\vdash pc \downarrow (sc \downarrow a) \rightharpoondown a$
5. $\vdash (a\alpha \leftarrow b) \rightarrow (sc\alpha \downarrow b \rightharpoondown a)$
6. $\vdash (a\alpha \leftarrow b) \rightarrow (pc\alpha \downarrow a \rightharpoondown b)$

Аксиомные схемы AVII:

1. $(\forall a)((a\beta \downarrow b)\alpha \leftarrow c) \vdash (\forall (a\beta \downarrow b))((a\beta \downarrow b)\alpha \leftarrow c)$
2. $(\forall (a\beta \downarrow b))((a\beta \downarrow b)\alpha \leftarrow c) \vdash (\forall a)((a\beta \downarrow b)\alpha \leftarrow c)$

Аксиомные схемы AVIII:

1. $(\forall a)x(\forall (a \downarrow x))y \vdash (\forall a)y$
2. $(\exists a)x(\forall (a \downarrow x))y \vdash (\exists a)y$

§ 4. Силлогистика предикатов

Используя правила образования терминов, можно построить силлогистику предикатов.

Неклассическая система при этом образуется путем присоединения к ранее рассмотренным системам следующих аксиомных схем:

$A1.$ $(\exists a)(a \leftarrow b) \dashv\vdash (\exists (sc \downarrow b))((sc \downarrow b) \leftarrow (pc \downarrow a))$
$A2.$ $(\forall a)(a\alpha \leftarrow b) \dashv\vdash (\forall (sc\beta \downarrow b))((sc\beta \downarrow b)\neg \leftarrow$
$\leftarrow (pc \downarrow a))(\forall (sc\gamma \downarrow b))((sc\gamma \downarrow b)\neg \leftarrow (pc \downarrow a))$

где α, β и γ означают наличие или отсутствие $\neg$ или?, причем — все они различны.

Классический случай получается из неклассического путем замены схем $A2$ схемами:

$A^*2.$ $(\forall a)(a \leftarrow b) \dashv\vdash (\forall (sc \sim \downarrow b))$
$\sim ((sc \sim \downarrow b) \leftarrow (pc \downarrow a))$

Силлогистика предикатов, как видим, довольно громоздка и неудобна в обращении. Фактически рассматриваемая в логике силлогистика является силлогистикой классов (см. ниже).

§ 5. Определения

Вопросы, связанные с теорией определений, рассмотрены в [3, 4]. Здесь же мы ограничимся лишь несколькими замечаниями.

Определения суть соглашения о том (или намерения считать), что некоторого заданного вида предметы $a^1,\ldots$ $\ldots, a^n$ $(n \geqslant 1)$ будут терминами такими, что будут верны некоторые заданные утверждения $x^1,\ldots, x^m$ $(m \geqslant 1)$, в которые входят выражения с $a^1,\ldots, a^n$ и предикатом $\rightharpoondown$. Утверждения $x^1,\ldots, x^m$ должны быть подобраны так, чтобы для каждого a^i были верны утверждения $a^i \rightharpoondown b^1,\ldots$ $\ldots, a^i \rightharpoondown b^k$ и $b^1 \vee \ldots \vee b^k \rightharpoondown a^i$, где $b^1,\ldots, b^k$ суть термины, через которые определяется a^i.

Утверждения $x^1,\ldots, x^n$, о которых говорилось выше, имеют такой вид. Случай 1: определяется один термин a независимо от других определяемых терминов. Простейший вариант этого случая: 1) $a \rightharpoondown b$; 2) $b \rightharpoondown a$. Более сложный (общий) случай — рекурсивные определения:

1. $a \rightharpoondown b^1, \ldots, a \rightharpoondown b^r \; (r \geqslant 1)$
2. $(a \rightharpoondown c^1) \cdot \ldots \cdot (a \rightharpoondown c^s) \rightarrow$
   $\rightarrow (a \rightharpoondown d^1) \cdot \ldots \cdot (a \rightharpoondown d^t) \; (s \geqslant 1, \; t \geqslant 1)$
3. $b^1 \vee \ldots \vee b^r \vee d^1 \vee \ldots \vee d^t \rightharpoondown a$

Случай 2: определяются термины $a^1,\ldots, a^n$ $(n \geqslant 2)$ одновременно так, что одни из них используются при определении других.

Если определение принято, то утверждения $x^1,\ldots, x^m$, указанные выше, принимаются как доказуемые (или истинные). Так, пусть принято определение: «Предмет a

будет термином таким, что $a \rightleftharpoons b \downarrow c$». В таком случае принято $\vdash (a \rightleftharpoons b \updownarrow c)$. Этот принцип позволяет получать следствия из определений. Так, в нашем примере имеем:

1) $\vdash (a \rightleftharpoons b \downarrow c)$ — согласно определению;

2) $\vdash ((b \downarrow c) \leftarrow c)$ — согласно S_t^2;

3) $\vdash (\forall (b \downarrow c))((b \downarrow c) \leftarrow c)$ — согласно S_{cq}^5;

4) $\vdash (a \rightleftharpoons b \downarrow c)(\forall (b \downarrow c))((b \downarrow c) \leftarrow c) \rightarrow$
$\rightarrow (\forall a)(a \leftarrow c)$ — согласно S_t^2;

5) $\vdash (\forall a)(a \leftarrow c)$ — согласно 1, 2 и S_{if}^i.

Частный случай определений — определения с переменными, область значения которых суть термины. Они имеют вид намерений (соглашений) считать b термином таким, что верно x, если и только если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 1)$ суть термины такие, что верно y. Здесь x есть высказывание, содержащее b; y есть высказывание, содержащее $a^1, \ldots, a^n$; $b, a^1, \ldots, a^n$ суть переменные, области значения которых суть термины.

Правило для таких определений: в самом определении и в вытекающих из него следствиях на место переменных $a^1, \ldots, a^n$ нельзя подставлять b и все те термины, которые содержат b или определяются с использованием b. Это правило есть следствие содержащегося в самом определении условия, что $a^1, \ldots, a^n$ должны быть терминами независимо от определения b (т. е. b в их число не включается).

§ 6. Логически взаимозаменимые предикаты

$D1$. Предикаты b и c логически взаимозаменимы, если и только если для них доказуемы формулы

1. $(a \leftarrow b) \vdash (\alpha a \neg \leftarrow c)$
2. $(a \neg \leftarrow b) \vdash (\alpha a \leftarrow c)$

3. $(a? \leftarrow b) \vdash (\alpha a? \leftarrow c)$
4. $(a \leftarrow c) \vdash (\alpha a \urcorner \leftarrow b)$
5. $(a \urcorner \leftarrow c) \vdash (\alpha a \leftarrow b)$
6. $(a? \leftarrow c) \vdash (\alpha a? \leftarrow b)$

в неклассическом случае, и доказуемы формулы

1. $(a \leftarrow b) \vdash \sim (\alpha a \leftarrow c)$
2. $\sim (a \leftarrow b) \vdash (\alpha a \leftarrow c)$
3. $(a \leftarrow c) \vdash \sim (\alpha a \leftarrow b)$
4. $\sim (a \leftarrow c) \vdash (\alpha a \leftarrow b)$

в неклассическом случае ($\alpha\, a$ означает a, $\sim a$ или $\bar{a}$).

С примерами дедуктивно связанных и логически взаимозаменимых предикатов мы встретимся ниже. Аналогичные отношения имеют место, как известно, и для логических операторов. Таковы, например, операторы конъюнкции и слабой дизъюнкции. Для них имеют силу утверждения $xy \vdash x \vee y$, $\sim (x \vee y) \vdash \sim (xy)$, $\sim (x \vee y) \vdash \vdash \sim x \sim y$, $x \vee y \dashv\vdash \sim (\sim x \vee \sim y)$ и т. п. Как мы видели выше, кванторы $\forall$ и $\exists$ связаны и взаимозаменимы также и в смысле определений для неклассического случая.

§ 7. Логические термины

Логика не ограничивается рассмотрением логических операторов. Она исследует также особого вида термины и правила оперирования ими, не сводимые к правилам для логических операторов. Это — термины существования, модальностей, классов, отношений и т. д. Так как установление свойств этих терминов есть дело логики (а не какой-либо иной конкретной науки), будем называть такие термины логическими.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ЛОГИКА КЛАССОВ

§ 1. Классы

Логика классов образуется благодаря излагаемым ниже дополнениям к ранее рассмотренным системам. Системы логики классов рассматривались в [3—5].

Алфавит:

1) $\in$ — двухместный предикат включения индивида в класс;

2) $\subset$ — двухместный предикат включения класса в класс;

3) K — классообразующий оператор.

Предикаты $\in$ и $\subset$ суть простые предикаты.

$D1$. Если a есть субъект, то Ka есть термин класса (читается «Класс- a»). Термин класса есть субъект.

Высказывания о включении индивидов в классы и классов в классы имеют вид

$$(a, Kb) \leftarrow (\in)$$
$$(Ka, Kb) \leftarrow (\subset)$$

Мы будем употреблять более наглядные (и общепринятые) символы

$$a \in Kb$$
$$Ka \subset Kb$$

§ 2. Система S_k^1

Система S_k^1 получается путем добавления к S_{cq}^s того, что сказано в § 1, и следующих аксиомных схем:

Аксиомные схемы:

$A1.\ (\exists a)(a \in Kb) \vdash (\exists b)(b \in Ka)$

$A2.\ \sim (a \in Kb) \vdash (a \in K \sim b)$

$A3.\ (a \in K \sim b) \vdash \sim (a \in Kb)$

$A4.\ (a \in Kb)(\forall b)(b \in Kc) \vdash (a \in Kc)$

$A5.\ \vdash (a \in K(a \vee b))$

$A6.\ (\forall a)(a \in Kb) \vdash (Ka \subset Kb)$

$A7.\ (Ka \subset Kb) \vdash (\forall a)(a \in Kb)$

Если S_k^1 строится независимо от теории терминов, необходимо принять следующие правила замены терминов:

$R1$. Замена термина $\sim\sim a$ термином a, и наоборот.

$R2$. Замена термина ab термином ba.

$R3$. Замена термина a термином aa, и наоборот.

$R4$. Замена термина $a^1 \cdot \ldots \cdot a^i a^{i+1} \cdot \ldots \cdot a^n (i \geqslant 0,\ n \geqslant 1)$ термином $a^1 \cdot \ldots \cdot a^i (a^{i+1} \cdot \ldots \cdot a^n)$, и наоборот.

$R5$. Замена термина $\sim (ab)$ термином $\sim a \vee \sim b$, и наоборот.

$T1.\ (\forall a)(a \in Kb)(\forall b)(b \in Kc) \vdash (\forall a)(a \in Kc)$

$T2.\ (\exists a)(a \in Kb)(\forall b)(b \in Kc) \vdash (\exists a)(a \in Kc)$

$T3.\ (\forall a)(a \in Kb) \vdash (\forall \sim b) \sim (\sim b \in Ka)$

$T4.\ (\forall \sim b) \sim (\sim b \in Ka) \vdash (\forall a)(a \in Kb)$

$T5.\ \vdash ab \in Ka$

$T6.\ \vdash Ka \subset K(a \vee b)$

$T7.\ \vdash K(ab) \subset Ka$

Примем следующую семантическую интерпретацию (которая в пунктах 1—3 предложена А. М. Фединой):

1) если $a \in Kb$ приписывается значение 1, то $a \in K \sim b$ приписывается значение 0, значения $\sim a \in Kb$ и $\sim a \in K \sim b$ не зависят от $a \in Kb$, $\sim b \in K \sim a$ приписывается значение 1;

2) если $a \in Kb$ приписывается значение 0, то $a \in \in K \sim b$ приписывается значение 1, а $b \in Ka$ — значение 0;

3) если $a \in Kb$ и $b \in Kc$ приписывается значение 1, то $a \in Kc$ приписывается значение 1; если $a \in Kb$ приписывается значение 1, а $b \in Kc$ — значение 0, то $a \in Kc$ приписывается значение 0; если $a \in Kb$ приписывается значение 0, то значение $a \in Kc$ остается неопределенным, какое бы значение ни приписали $b \in Kc$;

4) $a \in K(a \vee b)$ и $ab \in Ka$ всегда принимают значение 1;

5) $(\forall a)$ $(a \in Kb)$ и $Ka \subset Kb$ равнозначны;

6) правила замены дают равнозначные высказывания.

*MT*1. Все доказуемые в S_k^1 формулы суть тавтологии.

Если принять аксиомные схемы

$$(a \to b) \vdash (\forall b)(b \in Ka)$$

$$(\forall b)(b \in Ka) \vdash (a \to b),$$

то некоторые аксиомные схемы S_k^1 окажутся зависимыми в теории терминов, расширенной за счет логики классов.

§ 3. Система S_k^2

Система S_k^2 отличается от S_k^1 лишь тем, что вместо аксиомной схемы $A4$ принимаются аксиомные схемы:

$A^14.\ (\forall a)\, x\,(b \in Ka) \vdash y,$

где y образуется из x путем замены a на b везде, где a входит в x.

$A^24.\ x\,(b \in Ka) \vdash (\exists a)\, y,$

где y образуется из x путем замены b на a везде, где b входит в x.

Аксиомная схема $A4$ получается в S_k^2 как следствие из A^14. В S_k^2 доказуема также формула

$$(b \in Kc)(b \in Ka) \vdash (\exists a)(a \in Kc)$$

§ 4. Силлогистика классов

Аксиомные схемы $A1 - A4$ достаточны для полной. силлогистики классов. Доказательство этого утверждения дано А. М. Фединой в работе [15]. Для доказательства этого утверждения достаточно взять частичную систему S_k^s.

Аксиомные схемы S_k^s:

$A\ 1.\ x \vdash \sim\sim x$

$A\ 2.\ \sim\sim x \vdash x$

$A\ 3.\ xy \vdash x$

$A\ 4.\ xy \vdash yx$

$A\ 5.\ (\forall a)\, x \vdash x$

$A\ 6.\ x \vdash (\exists a)\, x$

$A\ 7.\ (\forall a)\, x \vdash \sim (\exists a) \sim x$

$A\ 8.\ \sim (\exists a) \sim x \vdash (\forall a)\, x$

$A\ 9.\ (\forall a)\,(a \in Kb)\,(\forall b)\,(b \in Kc) \vdash (\forall a)\,(a \in Kc)$

$A10.\ (\exists a)\,(a \in Kb)\,(\forall b)\,(b \in Kc) \vdash (\exists a)\,(a \in Kc)$

$A11.\ (\forall a)\,(a \in Kb) \vdash (\forall \sim b) \sim (\sim b \in Ka)$

$A12.\ (\forall \sim b) \sim (\sim b \in Ka) \vdash (\forall a)\,(a \in Kb)$

$A13.\ (\exists a)\,(a \in Kb) \vdash (\exists b)\,(b \in Ka)$

Правила вывода:

$R1$. Если $x \vdash y$ и $y \vdash x$, то $z \vdash v$, где v получается из z заменой вхождения x в z на y.

$R2$. Если $x \vdash y$ и $y \vdash z$, то $x \vdash z$.

$R3$. Если $x \vdash y$ и $x \vdash z$, то $x \vdash yz$.

$R4$. Если y образуется из x путем замены $\sim\sim a$ на a (или a на $\sim\sim a$), то $x \vdash y$.

$D1$. Простой категорический силлогизм есть формула вида

$$K^1\alpha^1\,(a^i \in Kb^k)\,K^2\alpha^2\,(a^l \in Kb^m) \vdash K^3\alpha^3\,(a^1 \in Kb^2),$$

где α^1, α^2, α^3 означают наличие или отсутствие отрицания; K^1, K^2, K^3 суть кванторные группы; $i \leqslant 3$, $k \leqslant 3$, $l \leqslant 3$, $m \leqslant 3$; высказывания $a^i \in Kb^k$ и $a^l \in Kb^m$ различны, *MT*1. Если простой категорический силлогизм $x \vdash y$ есть тавтология, то $x \vdash y$ доказуема в S^s_k.

Доказательство *MT*1. Посылка $x \vdash y$ может иметь вид

1a. $(\forall a)(a \in Kc)$	3a. $(\forall b)(b \in Kc)$
1b. $(\exists a)(a \in Kc)$	3b. $(\exists b)(b \in Kc)$
1c. $(\forall a) \sim (a \in Kc)$	3c. $(\forall b) \sim (b \in Kc)$
1d. $(\exists a) \sim (a \in Kc)$	3d. $(\exists b) \sim (b \in Kc)$
2a. $(\forall c)(c \in Ka)$	4a. $(\forall c)(c \in Kb)$
2b. $(\exists c)(c \in Ka)$	4b. $(\exists c)(c \in Kb)$
2c. $(\forall c) \sim (c \in Ka)$	4c. $(\forall c) \sim (c \in Kb)$
2d. $(\exists c) \sim (c \in Ka)$	4d. $(\exists c) \sim (c \in Kb)$

Заключение $x \vdash y$ может иметь вид:

5a. $(\forall a)(a \in Kb)$	5c. $(\exists a)(a \in Kb)$
5b. $(\forall a) \sim (a \in Kb)$	5d. $(\exists a) \sim (a \in Kb)$

Всего возможно 512 простых категорических силлогизмов. Нам достаточно рассмотреть 256, поскольку остальные 256 получаются из них согласно *A*4. Кроме того, имеют силу следующие правила, сокращающие число рассматриваемых случаев.

*R**1. Если заключение простого категорического силлогизма $x \vdash y$ имеет вид 5*b* или 5*d*, и если $x \vdash y$ принимает значение 0, то простой категорический силлогизм, отличающийся от него только тем, что заключение его имеет вид соответственно 5*a* или 5*c*, также принимает значение 0 (это очевидно из того, что $(\forall a)x$ имеет значение 0, если $(\exists a)x$ имеет значение 0).

*R**2. Если один из конъюнктивных членов посылки простого категорического силлогизма $x \vdash y$ имеет вид *ia* ($i = 1, 2, 3, 4$) или *ic*, и если $x \vdash y$ имеет значение 0, то простой категорический силлогизм, отличающийся от него только тем, что соответствующий конъюнктивный член посылки имеет вид *ib* или, соответственно, *id*, точно так же имеет значение 0 (это очевидно из того, что $(\exists a)x$ имеет значение 1, если $(\forall a)x$ имеет значение 1).

Путем пересмотра всех простых категорических силлогизмов устанавливаем, какие из них могут принимать значение 0 и какие нет (т. е. являются тавтологиями). Так, формулы вида

$$1a \cdot 3a \vdash 5b \qquad 1a \cdot 4a \vdash 5d \qquad 2a \cdot 3a \vdash 5a$$

могут принять значение 0, а формулы

$$1a \cdot 4a \vdash 5a \qquad 1a \cdot 4c \vdash 5c$$

суть тавтологии. Одним словом, устанавливаем, что тавтологиями являются лишь 19 модусов, категорического силлогизма. И все эти модусы доказуемы в S_k^s. Для доказательства необходимо производное правило R^*3 и предварительные теоремы $L1$ — $L5$.

Производное правило:

R^s3. Если $x \dashv\vdash y$, то $\sim y \dashv\vdash \sim x$
[$R1$, $A1$, $A2$, $R5$, $R4$]

Предварительные теоремы:

$L1$. $(\forall a) \sim (a \in Kb) \dashv\vdash (\forall a)(a \in K \sim b)$
[$A11$, $A12$, R^s3, $R2$, $R4$]

$L2$. $(\forall a)(a \in Kb) \dashv\vdash (\forall \sim b)(\sim b \in K \sim a)$
[$R4$, $A11$, $A12$, $L1$]

$L3$. $(\forall \sim b)(\sim b \in K \sim a) \vdash (\forall a)(a \in Kb)$
[$L2$, $R2$, $R3$]

$L4$. $(\exists a) \sim (a \in Kb) \dashv\vdash (\exists a)(a \in K \sim b)$
[$L1$, $R4$, $A7$, $A8$, $A1$, $A2$, R^s3, $R2$, $R3$]

$L5$. $(\forall a) \sim (a \in Kb) \dashv\vdash (\forall b) \sim (b \in Ka)$
[$L1$, $R4$, $R2$, $L2$, $L3$, $R5$]

Модусы простого категорического силлогизма:

$T1.\ (\forall c)(c \in Kb)(\forall a)(a \in Kc) \vdash (\forall a)(a \in Kb)$ [$R2$, $A9$, $R1$, $A4$, $R5$]

$T2.\ (\forall c) \sim (c \in Kb)(\forall a)(a \in Kc) \vdash (\forall a) \sim (a \in Kb)$ [$A9$, $L1$, $L2$, $R2 - R5$]

$T3.\ (\forall c)(c \in Kb)(\exists a)(a \in Kc) \vdash (\exists a)(a \in Kb)$ [$A4$, $A10$, $R1$, $R2$, $R5$]

$T4.\ (\forall c) \sim (c \in Kb)(\exists a)(a \in Kc) \vdash (\exists a) \sim (a \in Kb)$ [$A7$, $A8$, $L1$, $T3$, $R2$, $R4$, $R5$]

$T5.\ (\forall b) \sim (b \in Kc)(\forall a)(a \in Kc) \vdash (\forall a) \sim (a \in Kb)$ [$A7$, $A8$, $L2$, $T1$, $R2$, $R4$, $R5$]

$T6.\ (\forall b)(b \in Kc)(\forall a) \sim (a \in Kc) \vdash (\forall a) \sim (a \in Kb)$ [$A1$, $A2$, $L1$, $T5$, $R1$, $R4$, $R5$]

$T7.\ (\forall b) \sim (b \in Kc)(\exists a)(a \in Kc) \vdash (\exists a) \sim (a \in Kb)$ [$T4$, $L5$, $R4$, $R5$]

$T8.\ (\forall b)(b \in Kc)(\exists a) \sim (a \in Kc) \vdash (\exists a) \sim (a \in Kb)$ [$A1$, $A2$, $A7$, $A8$, $T7$, $L1$, $R2$, $R4$, $R5$]

$T9.\ (\forall c)(c \in Kb)(\forall c)(c \in Ka) \vdash (\exists a)(a \in Kb)$ [$A3$, $A5$, $A6$, $A13$, $T3$, $R1$, $R4$, $R5$, $R6$]

$T10.\ (\forall c) \sim (c \in Kb)(\forall c)(c \in Ka) \vdash (\exists a) \sim (a \in Kb)$ [$A7$, $A8$, $T9$, $L1$, $R2$, $R4$, $R5$]

$T11.\ (\exists c)(c \in Kb)(\forall c)(c \in Ka) \vdash (\exists a)(a \in Kb)$ [$A10$, $A13$, $R2$, $R4$, $R5$]

$T12.\ (\forall c)(c \in Kb)(\exists c)(c \in Ka) \vdash (\exists a)(a \in Kb)$ [$A13$, $T3$, $R4$, $R5$]

$T13.\ (\exists c) \sim (c \in Kb)(\forall c)(c \in Ka) \vdash (\exists a) \sim (a \in Kb)$ [$A7$, $A8$, $T11$, $L1$, $R2$, $R4$, $R5$]

$T14.\ (\forall c) \sim (c \in Kb)(\exists c)(c \in Ka) \vdash (\exists a) \sim (a \in Kb)$ [$A7$, $A8$, $T12$, $L1$, $R2$, $R4$, $R5$]

$T15.\ (\forall b)(b \in Kc)(\forall c)(c \in Ka) \vdash (\exists a)(a \in Kb)$ [$A6$, $A9$, $A13$, $A5$, $R1$, $R2$, $R4$, $R5$]

$T16.\ (\forall b)(b \in Kc)(\forall c) \sim (c \in Ka) \vdash (\forall a) \sim (a \in Kb)$ [$R4$, $R5$, $T6$, $L5$]

$T17.\ (\exists b)(b \in Kc)(\forall c)(c \in Ka) \vdash (\exists a)(a \in Kb)$ [$R4, R5, T11, A13$]

$T18.\ (\forall b) \sim (b \in Kc)(\forall c)(c \in Ka) \vdash (\exists a) \sim (a \in Kb)$ [$R4, R5, T10, L5$]

$T19.\ (\forall b) \sim (b \in Kc)(\exists c)(c \in Ka) \vdash (\exists a) \sim (a \in Kb)$ [$R4, R5, T14, L5$]

Теоремы $T1$ — $T19$ суть соответственно модусы *Barbara*, *Celarent*, *Darii*, *Ferio*, *Cesare*, *Camestres* и т. д.

В силу непротиворечивости S_k^s остальные простые категорические силлогизмы недоказуемы.

$D2$. Категорический силлогизм есть формула вида

$$\mathrm{K}^1\alpha^1(a^1 \in Kb^1)\cdot \ldots \cdot \mathrm{K}^n\alpha^n(a^n \in Kb^n) \vdash \mathrm{K}\alpha(a \in Kb),$$

где $n \geqslant 2$, и все $a^i \in Kb^i$ попарно различны.

$MT2$. Если категорический силлогизм $x \vdash y$ есть тавтология, то $x \vdash y$ доказуема в S_k^s.

Теорема $MT2$ доказывается методом математической индукции по числу конъюнктивных членов в посылке. Базисный шаг, когда $n = 2$, уже доказан выше. Пусть теорема верна для n членов конъюнкции. Рассмотрим категорический силлогизм A

$$x^1x^2 \ldots x^{n+1} \vdash x.$$

Возможны два случая. Случай 1:

$$x^1 \cdot \ldots \cdot x^n \vdash x$$

есть тавтология и, согласно допущению, доказуема; очевидно, будет тавтологией и доказуемой формула A. Случай 2: указанная в случае 1 формула не есть тавтология. В этом случае может быть найдена такая z, что

$$x^1 \cdot \ldots \cdot x^n \vdash z \qquad zx^{n+1} \vdash x$$

суть тавтологии и доказуемы, причем — вторая формула есть простой категорический силлогизм. Отсюда получаем, что будет доказуема A.

§ 5. Силлогистика классов и силлогистика предикатов

Имеет место связь силлогистики классов и классической силлогистики предикатов. Она устанавливается, в частности, аксиомными схемами:

$$(a \leftarrow (x \downarrow)) \dashv\vdash (a \in K(sc \downarrow x)).$$

§ 6. Квазиклассический случай в теории кванторов

Примем аксиомную схему:

$A1.\ \vdash a \in Kb.$

Из $A1$ следует:

$T1.\ \vdash (\forall a)(a \in Kb)$

Аксиомная схема $A1$ означает допущение того, что области значения всех простых субъектов совпадают,— допущение, лежащее в основе классического и интуиционистского исчислений предикатов. Лишь при условии такого допущения в этих исчислениях оказываются общезначимыми и формулы вида $(\forall a)(a \leftarrow b) \supset (c \leftarrow b)$ и $(c \leftarrow b) \supset (\exists a)(a \leftarrow b)$.

Благодаря $A1$ на уровне систем квазиследования будут доказуемы формулы $(\forall a)(a \leftarrow b) \vdash (c \leftarrow b)$ и $(c \leftarrow b) \vdash$ $\vdash (\exists a)(a \leftarrow b)$, в общем случае — формулы $(\forall a)x \vdash y$ и $y \vdash (\exists a)x$, где y образуется из x путем замены вхождений a в x на c.

В самом деле, согласно S_k^2 доказуемы $(\forall a)(a \leftarrow b)\cdot$ $\cdot(c \in Ka) \vdash (c \leftarrow b)$ и $(c \leftarrow b)(c \in Ka) \vdash (\exists a)(a \leftarrow b)$. (Согласно $A1$ и по правилу квазиследования получим $\forall a)(a \leftarrow b) \vdash (c \rightarrow b)$ и $(c \leftarrow b) \vdash (\exists a)(a \leftarrow b)$.

§ 7. Классы классов

Термин «класс» (будем употреблять буквы kl) интуитивно означает следующее: если a есть термин, то Ka есть kl, т. е. $\vdash (kl \rightarrow Ka)$. Отсюда получаем, что если a есть термин, то $\vdash (\forall Ka)(Ka \in Kkl)$. Однако это рассуждение содержит ошибки.

Прежде всего надо различать термин «класс» (буквы kl) и классообразующий оператор «класс» (буква K), который термином не является. Определение же термина kl имеет такой вид.

$D1$. Пусть kl будет термином таким, что если a есть термин, то $\vdash (kl \rightarrow Ka)$. Поскольку $(kl \rightarrow Ka) \vdash (\forall Ka)$ $(Ka \in K\,kl)$, определению можно придать такой вид:

$D^{*}1$. Пусть kl и Kkl будут терминами такими, что если a есть термин, то $\vdash (\forall Ka)$ $(Ka \in Kkl)$.

Выражение «Пусть kl будет термином» имеет определенные логические свойства: оно превращает вещь вида kl, которая до этого и независимо от этого не была термином, в термин. И выражение «если a есть термин» благодаря этому позволяет в качестве a брать только такие вещи, которые уже являются терминами или становятся терминами независимо от принятия $D1$. Короче говоря, $D1$ есть определение с переменной, правило для которого указано выше. Роль переменной здесь играет a (область ее значения — термины, не зависящие по значению от kl).

Согласно правилу построения определений такого типа из $D1$ не может быть получено следствие «Если a есть термин, то $kl \rightarrow Ka$ (или $Ka \in Kkl$; или $(\forall a)$ $(kl \rightarrow Ka)$; или $(\forall a)$ $(Ka \in Kkl)$)», где a есть любой термин, в том числе — термин kl. Не могут быть получены и утверждения $kl \rightarrow Kkl$ и $Kkl \in Kkl$. Из $D1$ может быть выведено лишь такое утверждение:

$MT1$. Если a есть термин, не зависящий по значению от kl (т. е. значение которого может быть установлено без $D1$), то $kl \rightarrow Ka$ (то $Ka \in Kkl$).

Вопрос о том, как быть с упомянутыми выше утверждениями, зависит от внешних для них обстоятельств: они могут быть приняты или не приняты как аксиомы в зависимости от того, нужно это или нет, и в зависимости от того, приведет это к противоречиям или нет.

§ 8. Парадокс класса нормальных классов

Выражение «нормальный класс» (или «нормальное множество») определяют так: класс называется нормальным, если и только если он не является элементом самого себя. Это определение непригодно потому, что в нем явно не выражено то, что класс есть всегда класс чего-то. Примем определение, устраняющее этот недостаток:

$D1$. Если a есть термин и при этом $\sim(Ka \in Ka)$, то Ka будем называть нормальным классом (вместо выражения «нормальный класс» будем писать буквы nk).

Выражение «Будем называть» имеет логические свойства, которые выражаются в случае с $D1$ таким образом:

D^*1. Пусть nk будет термином таким, что $nk \rightarrow Ka$ (или $Ka \in Knk$), если и только если a есть термин и при этом $\sim(Ka \in Ka)$.

Здесь опять-таки имеет место определение с переменной: роль переменной здесь играет буква a; область значения a — термины, не зависящие по значению от nk.

При получении парадокса класса нормальных классов забывают (или не замечают) того, что на место a не может быть подставлен термин nk и любой другой термин, определяемый через nk, и определению придают вид утверждения A: если a есть термин, и $\sim(Ka \in Ka)$, то $Ka \in Knk$; если a есть термин и $Ka \in Ka$, то $\sim(Ka \in Knk)$. Подставляя на место a термин nk, получают утверждения B: если $\sim(Knk \in Knk)$, то $(Knk \in Knk)$; если $(Knk \in Knk)$, то $\sim(Knk \in Knk)$.

Но утверждение A неверно. Верным будет такое следствие $D1$: если a есть термин, не зависящий по значению от nk, и $\sim (\overline{Ka} \in \overline{Ka})$, то $\overline{Ka} \in \overline{Knk}$; если $\overline{Ka} \in \overline{Ka}$, то при том же условии относительно a будет $\sim (\overline{Ka} \in \overline{Knk})$. А так как nk зависит по значению от самого себя (мы не можем знать значение nk, не определив nk), получить утверждение B нельзя.

Вопрос же о том, принимать или не принимать утверждение $nk \rightarrow Knk$ (и вытекающее из него следствие $Knk \in \in Knk$), остается открытым. Оно безразлично по отношению к $D1$ в том смысле, что, приняв $nk \rightarrow Knk$ и $D1$, мы еще не можем получить отсюда логическое противоречие. Противоречие не получится и в случае, если мы примем $D1$ и $\sim (Knk \in Knk)$ и вытекающее из него следствие $\sim (nk \rightarrow Knk)$).

§ 9. Производные классы

Расширим понятие «термин класса».

$D1$. Термин класса:

1) если a есть субъект, то (Ka) есть термин класса,

2) если (a) есть термин класса, то $(\bar{a})$ есть термин класса;

3) если a и b суть термины классов, то $(a) \cup (b)$ и $(a) \cap (b)$ суть термины классов; аналогично если $a^1, \ldots$ $\ldots, a^n$ суть термины классов, то $(a^1) \cup (a^2) \cup \ldots \cup (a^n)$ и $(a^1) \cap (a^2) \cap \ldots \cap (a^n)$ суть термины классов.

Принято называть $(\bar{a})$ дополнением к (a), $(a) \cup (b)$ — суммой (a) и (b), $(a) \cap (b)$ — произведением (a) и (b).

Примем аксиомные схемы:

$A1. \vdash (\overline{Ka}) \rightleftharpoons (K \sim a)$

$A2. \vdash ((Ka) \cup (Kb)) \rightleftharpoons (K (a \vee b))$

$\vdash ((Ka^1) \cup (Ka^2) \cup \ldots \cup K (a^n)) \rightleftharpoons (K (a^1 \vee a^2 \vee \ldots$
$\ldots \vee a^n))$

$A3. \vdash ((Ka) \cap (Kb)) \rightleftharpoons (K (ab))$

$\vdash ((Ka^1) \cap (Ka^2) \cap \ldots \cap (Ka^n)) \rightleftharpoons (K (a^1 a^2 \ldots a^n))$

Очевидно, знаки —, $\cup$ и $\cap$ обладают свойствами, аналогичными $\sim$, $\vee$ и $\cdot$ (при соответствии $\rightleftharpoons$ и $\dashv \vdash$).

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ЛОГИКА СУЩЕСТВОВАНИЯ

§ 1. Экзистенциальные предикаты

Предикат существования («существует») является простым (с точки зрения логики) предикатом. Будем изображать его символом E. На него распространяется все, что верно в отношении предикатов вообще. Но он обладает некоторыми специфическими свойствами, которые являются предметом внимания особого раздела логики. Смысл предиката существования в каждой науке устанавливаётся определенными способами. Эти способы поддаются, надо думать, обобщению и классификации. Но для нас здесь достаточно знать, что такие способы имеются. Рассматриваемые в логике правила от них, однако, не зависят.

Через E можно определить другие предикаты, которые точно так же относятся к числу экзистенциальных, в частности — предикат «универсально». Будем изображать его символом U. Предикаты E и U являются логически взаимозаменимыми. Первый из них категорически сильнее второго.

Высказывания, содержащие экзистенциальные предикаты, суть экзистенциальные высказывания.

Системы логики существования рассматривались в [3—5].

В дальнейшем для упрощения записи высказывания $a \leftarrow b$, $a \urcorner \leftarrow b$ и $a? \leftarrow b$ будем изображать символами соответственно $b\,(a)$, $\urcorner\, b\,(a)$ и $?\, b\,(a)$.

§ 2. Система S_n^e

Алфавит:

1) E — предикат существования;
2) U — предикат универсальности.

Аксиомные схемы AI:

1. $E(a^1, \ldots, a^n) \vdash E(a^1) \cdot \ldots \cdot E(a^n)$
2. $E(a^1) \cdot \ldots \cdot E(a^n) \vdash E(a^1, \ldots, a^n)$
3. $\urcorner E(a^1, \ldots, a^n) \vdash \urcorner E(a^1) \vee \ldots \vee \urcorner E(a^n)$
4. $\urcorner E(a^1) \vee \ldots \vee \urcorner E(a^n) \vdash \urcorner E(a^1, \ldots, a^n)$
5. $U(a^1, \ldots, a^n) \vdash U(a^1) \cdot \ldots \cdot U(a^n)$
6. $U(a^1) \cdot \ldots \cdot U(a^n) \vdash U(a^1, \ldots, a^n)$
7. $\urcorner U(a^1) \vee \ldots \vee \urcorner U(a^n) \vdash \lrcorner U(a^1) \vee \ldots \vee \urcorner U(a^n)$
8. $\urcorner U(a^1, \ldots, a^n) \vdash \urcorner U(a^1, \ldots, a^n)$

Аксиомные схемы AII:

1. $E(a) \urcorner E(a \downarrow b) \vdash E(a \urcorner \downarrow b)$
2. $E(a) ? E(a \downarrow b) \vdash E(a ? \downarrow b)$
3. $E(a) \sim E(a \downarrow b) \vdash E(a \sim \downarrow b)$

Аксиомные схемы A III:

1. $(\exists a) E(a) \vdash E(a)$
2. $\sim E(a) \vdash (\forall a) \sim E(a)$

Аксиомные схемы A IV:

1. $U(a) \vdash \urcorner E(\sim a)$, $\quad U(\downarrow x) \vdash \urcorner E(\downarrow \sim x)$
2. $\urcorner E(\sim a) \vdash U(a)$, $\quad \urcorner E(\downarrow \sim x) \vdash U(\downarrow x)$
3. $\urcorner U(a) \vdash E(\sim a)$, $\quad \urcorner U(\downarrow x) \vdash E(\downarrow \sim x)$
4. $E(\sim a) \vdash \urcorner U(a)$, $\quad E(\downarrow \sim x) \vdash \urcorner U(\downarrow x)$
5. $U(a) \vdash E(a)$, $\quad U(\downarrow x) \vdash E(\downarrow x)$

Аксиомные схемы A V:

1. $\vdash \urcorner E(\sim aa)$
2. $\vdash \urcorner E(a\bar{a})$

Аксиомные схемы A IV:

1. $(\exists a)\, x \vdash E(a \downarrow x)$
2. $E(a \downarrow x) \vdash (\exists a)\, x$
3. $(\neg \exists a)\, x \vdash \neg E(a \downarrow x)$
4. $\neg E(a \downarrow x) \vdash (\neg \exists a)\, x$,

где (в схемах 1—4) предикат E не входит в x.

Аксиомные схемы A VII:

1. $E(ab) \vdash E(a)\, E(b)$ $\quad E(\downarrow(xy)) \vdash E(\downarrow x)\, E(\downarrow y)$
2. $E(a \vee b) \dashv\vdash E(a) \vee E(b)$
$E(\downarrow(x \vee y)) \dashv\vdash E(\downarrow x) \vee E(\downarrow y)$
3. $\neg E(a) \vee \neg E(b) \vdash \neg E(ab)$
$\neg E(\downarrow x) \vee \neg E(\downarrow y) \vdash \neg E(\downarrow(xy))$
4. $\neg E(a \vee b) \dashv\vdash \neg E(a)\, \neg E(b)$
$\neg E(\downarrow(x \vee y)) \dashv\vdash \neg E(\downarrow x)\, \neg E(\downarrow y)$
5. $U(a)\, E(b) \vdash E(ab)$ $\quad U(\downarrow x)\, E(\downarrow y) \vdash E(\downarrow(xy))$
6. $U(a \vee b) \vdash U(a) \vee E(b)$ $\quad U(\downarrow(x \vee y)) \vdash U(\downarrow x) \vee$
$\vee E(\downarrow y)$

Аксиомные схемы A VIII:

1. $x \vdash E(\downarrow x)$
2. $U(\downarrow x) \vdash x$
3. $E(\downarrow x) \vdash E(a \downarrow x)$
4. $E(a \downarrow x) \vdash E(\downarrow x)$

где (в 3 и 4) a входит свободно в x.

5. $E(a \downarrow x) \vdash E(a)$
6. $\neg E(a) \vdash \neg E(a \downarrow x)$
7. $?\, E(a) \vdash \sim E(a \downarrow x)$

где (в 5—7) E не входит в x.

Правило вывода:

$R1$ Если $\vdash x$, то $\vdash U(\downarrow x)$.

§ 3. Некоторые следствия в S^e_n

1. $E(abc) \vdash E(a)$
2. $\neg E(a \vee b \vee c) \dashv\vdash \neg E(a) \neg E(b) \neg E(c)$
3. $U(ab) \dashv\vdash U(a) U(b)$
4. $\neg E(a) \vee \neg E(b) \vee \neg E(c) \vdash \neg E(abc)$
5. $\vdash (a \rightharpoondown b) E(b) \to E(a)$
6. $\vdash (a \rightharpoondown b) \neg E(a) \to \neg E(b)$
7. $\vdash (a \rightharpoondown b)\, ?\, E(a) \to \sim E(b)$
8. $\vdash \neg E(\sim aab)$
9. $\vdash U(a \vee \sim a)$
10. $\vdash U(a \vee \sim a \vee b)$
11. $\sim E(\downarrow x) \vdash \sim x$
12. $U(a) \vdash \neg U(\sim a)$
13. $\neg E(\sim a) \vdash E(a)$
14. $\sim E(a) \vdash \sim U(a)$
15. $U(a) \vdash E(a) \neg E(\sim a)$
16. $U(\downarrow x) \vdash \neg U(\downarrow \sim x)$
17. $(\forall a) x \vdash \neg E(a \downarrow \sim x)$
18. $(\neg \forall a) x \vdash E(a \downarrow \sim x)$
19. $\vdash U(\downarrow (x \vee \sim x))$
20. $\vdash U(\downarrow (x \vee \sim x \vee y))$
21. $\vdash \neg E(\downarrow (\sim xx))$
22. $\vdash U(\downarrow (xy \to x))$
23. $\vdash \neg E(\downarrow (x \to \sim x))$
24. $U(a) \vdash (\forall a) \sim E(\sim a)$
25. $\vdash \sim (?\, \exists a) E(a)$

§ 4. Теорема универсальности

*MT*1. $\vdash U(a)$ доказуема в таких и только таких случаях:

1) если a есть $\downarrow x$, где x есть высказывание, то x есть тавтология (или $\vdash x$ доказуема);

2) если является тавтологией высказывание a^*, которое образуется из a путем замены входящих в него терминов на высказывания (на место разных терминов ставятся разные и на место одинаковых одинаковые высказывания).

Для случая, когда a есть $\downarrow x$, теорема очевидна, ибо доказуемые $\vdash U(\downarrow x)$ получаются лишь в силу $R1$. Во втором случае доказуемые $\vdash U(a)$ получаются лишь в силу AV, $AIV1$ и $A\,IV2$. То, что доказуемой $\vdash U\,(a)$ соответствует тавтология a^*, очевидно. С другой стороны, если a^* есть тавтология, то ее каноническая форма $a_1 \vee \ldots \vee a_k$ есть тавтология. Но в общей теории дедукции доказуемы формулы $a_1 \vee \ldots \vee a_k \vdash a_1 \vee \sim a_1$ и $a_1 \vee \sim a_1 \vdash$ $\vdash a_1 \vee \ldots \vee a_k$. Следовательно, формула $a_1 \vee \sim a_1$ есть тавтология. Но в нашей системе доказуема формула $\vdash U \uparrow (a_1 \vee \sim a_1))$, что и требовалось доказать.

§ 5. Кванторы и предикаты существования

Из аксиомных схем $AIII$ и AVI вытекает следующее важное следствие:

1) формулы с кванторами всегда могут быть заменены на бескванторные формулы с предикатами существования;

2) формулы вида $\alpha E(a)$ и $\alpha U(a)$ могут быть заменены на формулы с кванторами и без предикатов существования лишь в случаях, когда $a \rightleftharpoons (b \downarrow x)$; если же a невозможно представить в таком виде, то элиминировать предикаты существования нельзя.

§ 6. Семантическая интерпретация

Примем следующую интерпретацию:

1) субъектам приписываются значения 1 и 0;

2) $E\,(a^1, \ldots, a^n)$ равнозначна $E\,(a^1) \cdot \ldots \cdot E\,(a^n)$;

3) $x \mapsto y$ равнозначна $x \supset y$;

4) $E\,(a \vee b)$ равнозначна $E\,(a) \vee E\,(b)$;

5) если a и b оба имеют значение 1, то значение ab остается неопределенным; если ab имеет значение 0, то значения a и b остаются неопределенными; если по крайней мере один из a и b имеет значение 0, то ab имеет значение 0; если ab имеет значение 1, то a и b имеют значение 1;

6) если один из a и $\sim a$ имеет значение 1 (0), то другой имеет значение 0 (1);

7) x, $\downarrow x$ и $a \downarrow x$ равнозначны;

8) если значения a и b равны, то равны значения $E\,(a)$ и $E\,(b)$, а также значения $\neg E\,(a)$ и $\neg E\,(b)$;

9) если $E\,(a)$ и $\alpha\, E\,(a \downarrow b)$ имеют значение 1, то $E\,(a\alpha \downarrow b)$ имеет значение 1 (α означает наличие $\neg$ или ? или отсутствие обоих);

10) если $E\,(a)$ имеет значение 1 (0), то a имеет значение 1 (0); если a может (не может) принять значение 1, то $E\,(a)$ имеет значение 1 (значение 0);

11) $U\,(a)$ равнозначно $\neg E\,(\sim a)$; $\neg U\,(a)$ равнозначно $E\,(\sim a)$; аналогично для $U\,(\downarrow x)$ и $(\neg E\,(\downarrow \sim x)$, $\neg U\,(\downarrow x)$ и $E\,(\downarrow \sim x)$;

12) $(\alpha \exists a)\, E\,(a)$ равнозначно $\alpha\, E\,(a)$;
$(\alpha \exists a)\, x$ равнозначно $\alpha\, E\,(a \downarrow x)$;

13) если a не может принять значение 1, то $?\, E\,(a)$ имеет значение 0:

*MT*1. Все доказуемые в S_n^e формулы суть тавтологии (и система непротиворечива).

*MT*2. Формулы

$$E\,(a)\,E\,(b) \vdash E\,(ab), \qquad E\,(\downarrow x)\,E\,(\downarrow y) \vdash E\,(\downarrow (xy))$$

$$\neg E\,(ab) \vdash \neg E\,(a) \vee \neg E\,(b),$$

$$\sim E\,(ab) \vdash \sim E\,(a) \vee \sim E\,(b),$$

$$\neg E\,(\downarrow (xy) \vdash \neg E\,(\downarrow x) \vee \neg (\downarrow y)$$

недоказуемы в S_n^e, поскольку не являются тавтологиями.

§ 7. Система S_c^e

Для классического случая достаточно следующих аксиомных схем. Из аксиомных схем AI остаются первые четыре. Вместо аксиомных схем AII принимается

$$E(a) \sim E(a \downarrow x) \vdash E(a \downarrow \sim x)$$

Из аксиомных схем $AIII$ остается лишь первая. Вместо аксиомных схем AIV принимаются:

1. $U(a) \vdash \sim E(\sim a)$, $\qquad U(\downarrow x) \vdash \sim E(\downarrow \sim x)$
2. $\sim E(\sim a) \vdash U(a)$, $\qquad \sim E(\downarrow \sim x) \vdash U(\downarrow x)$
3. $U(a) \vdash E(a)$

Аксиомная схема AV принимает вид: $\vdash \sim E(\sim aa)$. От аксиомных схем AVI остаются первые две. От аксиомных схем $AVII$ остаются первая, вторая, пятая, седьмая и восьмая, а шестая заменяется на такую:

$$\sim E(\downarrow x) \vee \sim E(\downarrow y) \vdash \sim E(\downarrow (xy))$$

Аксиомные схемы $AVII$ и правило $R1$ остаются без изменения.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА

§ 1. Модальные предикаты

Модальные предикаты суть предикаты «возможно», «необходимо», «случайно» и «вероятно (возможно) со степенью». К ним относится все, сказанное о предикатах вообще. Кроме того, они обладают специфическими свойствами, которые фиксируются в логике. Системы модальной логики такого рода, как излагаемые ниже, рассматривались в [3 — 5].

§ 2. Система S_n^{m1}

Алфавит:

1) M — предикат «возможно»;

2) N — предикат «необходимо»;

3) C — предикат «случайно».

$D1$. Модальные предикаты суть M, N и C и только они.

$D2$. Высказывания, содержащие модальные предикаты, суть модальные высказывания.

Аксиомные схемы AI:

1. $N(\downarrow x) \vdash x$

2. $x \vdash M(\downarrow x)$

Аксиомные схемы AII:

1. $N(\downarrow x) \vdash \neg M(\downarrow \sim x)$

2. $\neg M(\downarrow x) \vdash N(\downarrow \sim x)$

3. $\neg N(\downarrow x) \vdash M(\downarrow \sim x)$
4. $M(\downarrow x) \vdash \neg N(\downarrow \sim x)$

Аксиомные схемы AIII:

1. $C(\downarrow x) \vdash M(\downarrow x)\, M(\downarrow \sim x)$
2. $M(\downarrow x)\, M(\downarrow \sim x) \vdash C(\downarrow x)$
3. $\neg C(\downarrow x) \vdash M(\downarrow x) \neg M(\downarrow \sim x)$
4. $M(\downarrow x) \neg M(\downarrow x) \vdash \neg C(\downarrow x)$
5. $?C(\downarrow x) \vdash M(\downarrow x)\, ?M(\downarrow \sim x)$
6. $M(\downarrow x)\, ?M(\downarrow \sim x) \vdash ?C(\downarrow x)$

Аксиомные схемы AIV:

1. $M(\downarrow (x \vee y)) \vdash M(\downarrow x) \vee M(\downarrow y)$
2. $M(\downarrow x) \vee M(\downarrow y) \vdash M(\downarrow (x \vee y))$
3. $N(\downarrow x)\, N(\downarrow y) \vdash N(\downarrow (xy))$
4. $N(\downarrow x)\, M(\downarrow y) \vdash M(\downarrow (xy))$
5. $N(\downarrow (x \vee y)) \vdash N(\downarrow x) \vee M(\downarrow y)$
6. $M(\downarrow x)\, ?M(\downarrow y) \vdash ?M(\downarrow (xy))$
7. $N(\downarrow x)\, ?N(\downarrow y) \vdash ?N(\downarrow (xy))$
8. $?M(\downarrow x)\, ?M(\downarrow y) \vdash ?M(\downarrow (xy))$
9, $?N(\downarrow x)\, ?N(\downarrow y) \vdash ?N(\downarrow (xy))$

Аксиомные схемы AV:

1. $\alpha Q(a) \vdash \alpha Q(\downarrow (E(a)))$
2. $\alpha Q(\downarrow (E(a))) \vdash \alpha Q(a)$,

где (в 1 и 2) Q есть модальный предикат, а α означает наличие одного из $\neg$ и ? или отсутствие обоих.

3. $M(a, b) \vdash M(a)\, M(b)$
4. $M(a)\, M(b) \vdash M(a, b)$
5. $N(a, b) \vdash N(a)\, N(b)$
6. $N(a)\, N(b) \vdash N(a, b)$
7. $\neg M(a, b) \vdash \neg M(a) \vee \neg M(b)$

8. $\neg M(a) \vee \neg M(b) \vdash \neg M(a, b)$

9. $\neg N(a, b) \vdash \neg N(a) \vee \neg N(b)$

10. $\neg N(a) \vee \neg N(b) \vdash \neg N(a, b)$

Аксиомные схемы AVI:

1. $Q(\downarrow((\alpha \mathrm{K}\, a)\, x)) \vdash (\alpha \mathrm{K}\, a)\, Q(\downarrow x)$
2. $(\alpha \mathrm{K}\, a)\, Q(\downarrow x) \vdash Q(\downarrow((\alpha \breve{\mathrm{K}}\, a)\, x))$,

где Q есть модальный предикат, K есть $\forall$ или $\exists$, а α означает наличие $\neg$ или ? или отсутствие обоих.

Аксиомные схемы AVII:

1. $(x \to y) \vdash \neg M(\downarrow(x \sim y))$
2. $M(\downarrow(x \sim y)) \vdash (x \neg\!\!\to y)$
3. $(x \to y)\, N(\downarrow x) \vdash N(\downarrow y)$
4. $(x \to y)\, M(\downarrow x) \vdash M(\downarrow y)$
5. $(x \to y) \neg M(\downarrow y) \vdash \neg M(\downarrow x)$
6. $(x \to y) \neg N(\downarrow y) \vdash \neg N(\downarrow x)$
7. $(x \to y)\, ?M(\downarrow y) \vdash \sim M(\downarrow x)$
8. $(x \to y)\, ?N(\downarrow y) \vdash \sim N(\downarrow x)$
9. $M(\downarrow x)\, M(\downarrow y)\, (x \neg\!\!\to \sim y)\, (y \neg\!\!\to \sim x) \vdash M(\downarrow(xy))$

Аксиомные схемы AVIII:

1. $(\alpha \exists a)\, M(a) \vdash \alpha\, M(a)$
2. $\alpha\, M(a) \vdash (\alpha \exists\, a)\, M(a)$

Аксиомные схемы AIX:

1. $\alpha\, Q(\downarrow x) \vdash N(\downarrow(\alpha\, Q(\downarrow x)))$
2. $M(\downarrow(\alpha\, Q(\downarrow x))) \vdash \alpha\, Q(\downarrow x)$,

где Q есть модальный предикат, а α есть $\neg$ или ? или отсутствие обоих.

Правила вывода:

$R1$. Если $x \vdash y$, то $N(\downarrow x) \vdash N(\downarrow y)$.

$R2$. Если $x \vdash y$, то $M(\downarrow x) \vdash M(\downarrow y)$.

§ 3. Некоторые следствия

$T1.\ N(\downarrow(xy)) \vdash N(\downarrow x)\,N(\downarrow y)$

$T2.\ M(\downarrow xy) \vdash M(\downarrow x)\,M(\downarrow y)$

$T3.\ C(\downarrow(xy)) \vdash M(\downarrow x)\,M(\downarrow y)$

$T4.\ \urcorner N(\downarrow(xy)) \vdash \urcorner N(\downarrow x) \vee \urcorner N(\downarrow y)$

$T5.\ \urcorner N(\downarrow x) \vee \urcorner N(\downarrow y) \vdash \urcorner N(\downarrow(xy))$

$T6.\ N(\downarrow x) \vdash \urcorner C(\downarrow x)$

$T7.\ \urcorner C(\downarrow x) \vdash N(\downarrow x)$

$T8.\ \alpha C(\downarrow x) \vdash M(\downarrow x)$

$T9.\ N(\downarrow x) \vdash NN(\downarrow x)$

$T10.\ M(\downarrow x) \vdash NM(\downarrow x)$

$T11.\ MM(\downarrow x) \vdash M(\downarrow x)$

$T12.\ MN(\downarrow x) \vdash M(\downarrow x)$

$T13.\ \sim N(\downarrow x) \vdash N(\downarrow(\sim N(\downarrow x)))$

$T14.\ ?N(\downarrow(xy)) \vdash (?N(\downarrow x) \vee ?N(\downarrow y)) \cdot$
$\sim N(\downarrow x) \sim \urcorner N(\downarrow y)$

$T15.\ ?M(\downarrow(xy)) \vdash (?M(\downarrow x) \vee ?M(\downarrow y)) \cdot$
$\sim \urcorner M(\downarrow x) \sim \urcorner M(\downarrow y)$

§ 4. Модальные операторы

Слова «возможно», «необходимо» и «случайно» могут играть роль логических операторов. Будем для этой цели употреблять символы соответственно M, N и C.

Система S_n^{m2}, определяющая свойства модальных операторов, получается путем добавления к S_n^{m1} таких аксиомных схем.

Аксиомные схемы AI:

1. $(\alpha Q a)\,x \vdash \alpha Q\,(a \downarrow x)$
2. $\alpha Q\,(a \downarrow x) \vdash (\alpha Q a)\,x$

3. $(\alpha Q(a, b))\, x \vdash (\alpha Q a)\, x\, (\alpha Q b)\, x$

4. $(\alpha Q a)\, x\, (\alpha Q b)\, x \vdash (\alpha Q(a, b))\, x$

5. $(\alpha^1 Q^1 a^1) \ldots (\alpha^n Q^n a^n)\, x \vdash (\alpha^1 Q^1 a^1)\, x \cdot \ldots \cdot (\alpha^n Q^n a^n)\, x$

6. $(\alpha^1 Q^1 a^1)\, x \cdot \ldots \cdot (\alpha^n Q^n a^n)\, x \vdash (\alpha^1 Q^1 a^1) \ldots (\alpha^n Q^n a^n)\, x,$

где Q, $Q^1, \ldots, Q^n$ суть модальные операторы, α, $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ означают наличие $\urcorner$ или ? или их отсутствие, Q есть модальный предикат, соответствующий Q (если Q есть M, то Q есть M и т. д.).

Аксиомные схемы AII:

1. $(\alpha Q a)\, x \vdash (\alpha Q b)\, x,$

где a и b свободно входят в x, а Q есть модальный оператор.

2. $(Ma)\, x\, (N(a \downarrow x))\, y \vdash (Ma)\, y$

3. $(Na)\, x\, (N(a \downarrow x))\, y \vdash (Na)\, y$

Аксиомные схемы AIII:

1. $(\alpha K a)\, (\beta Q b)\, x \vdash (\alpha K a)\, ((\beta Q b)\, x)$

2. $(\alpha K a)\, ((\beta Q b)\, x) \vdash (\alpha K a)\, (\beta Q b)\, x$

3. $(Qa)\, x\, (\forall (a \downarrow x))\, y \vdash (Qa)\, y,$

где Q есть модальный оператор, K есть $\forall$ или $\exists$, α и β означают $\urcorner$ или ? или их отсутствие.

§ 5. Интерпретация

Примем следующую интерпретацию:

1) если x приписывается значение 1, то $M(\downarrow x)$ приписывается значение 1; если $M(\downarrow x)$ имеет значение 1, то x может принять значение 1; и если x может принять значение 1, то $M(\downarrow x)$ имеет значение 1; если $M(\downarrow x)$ приписывается значение 0, то x приписывается также значение 0;

2) $N(\downarrow x)$ равнозначно $\neg M(\downarrow \sim x)$; $\neg N(\downarrow x)$ равнозначно $M(\downarrow \sim x)$;

3) $C(\downarrow x)$ равнозначно $M(\downarrow x)\, M(\downarrow \sim x)$; $\neg C(\downarrow x)$ равнозначно $M(\downarrow x) \neg M(\downarrow \sim x)$; $?\, C(\downarrow x)$ равнозначно $M(\downarrow x)\, ?\, M(\downarrow \sim x)$;

4) если a и b равнозначны, то равнозначны $\alpha\, Q\, (a)$ и $\alpha\, Q\, (b)$;

5) $(\alpha\ \mathrm{Q}\ a)\, x$ равнозначно $\alpha Q\, (a \downarrow x)$;

6) $(\alpha\ \mathrm{Q}\ (a,\ b))\, x$ равнозначно $(\alpha\, \mathrm{Q}\, a)\, x\, (\alpha\ \mathrm{Q}\ b)\, x$;

7) $(\alpha^1 \mathrm{Q}^1\, a^1) \ldots (\alpha^n \mathrm{Q}^n a^n)\ x$ равнозначно $(\alpha^1 \mathrm{Q}^1 a^{-1}) x \cdot \ldots \cdot (\alpha^n\, \mathrm{Q}^n a^n)\, x$;

8) если $(\mathrm{Q}a)\, x$ и $(\mathrm{N}\, (a \downarrow x))\, y$ имеют значение 1, то $(\mathrm{Q}a)\, y$ имеет значение 1; аналогично для $(\mathrm{Q}a)\, x$, $(\forall(a \downarrow x))\, y$ и $(\mathrm{Q}a)\, y$;

9) $(\alpha\ \mathrm{K}a)\, Q\, (\downarrow x)$ и равнозначно $Q\, (\downarrow ((\alpha\ \mathrm{K}a)\, x))$;

10) $(\alpha\ \mathrm{K}a)\ (\beta\ \mathrm{Q}\ b)\, x$ равнозначно $(\alpha\ \mathrm{K}a)\ ((\beta\ \mathrm{Q}\ b)\ x)$.

*МТ*1. Все доказуемые в S_n^{m1} и S_n^{m2} формулы суть тавтологии.

§ 6. Классический случай

Система S_c^{m1} классической теории модальностей получается из S_n^{m1} путем исключения формул со знаком неопределенности, замены повсюду внутреннего отрицания на внешнее и исключения повторений и зависимых схем.

§ 7. Основная модальная логика

В современной логике в качестве модальной логики имеется в виду обычно лишь такая часть ее, в которой рассматриваются отношения модальных знаков M и N и операторов $\cdot$, $\vee$, $\sim$, $\supset$ (последний рассматривается как знак следования или «если, то»). В изложенной нами системе можно выделить часть, которая будет выполнять функции модальной логики в традиционном смысле,— основную модальную логику.

Система S_n^{mo} основной модальной логики образуется из таких аксиомных схем и правил.

Аксиомные схемы S_n^{mo}:

$A1.\ N(\downarrow x) \vdash x$

$A2.\ x \vdash M(\downarrow x)$

$A3.\ N(\downarrow x) \vdash \neg M(\downarrow \sim x)$

$A4.\ \neg M(\downarrow \sim x) \vdash N(\downarrow \sim x)$

$A5.\ \neg N(\downarrow x) \vdash M(\downarrow \sim x)$

$A6.\ M(\downarrow \sim x) \vdash \neg N(\downarrow x)$

$A7.\ M(\downarrow (x \vee y)) \vdash M(\downarrow x) \vee M(\downarrow y)$

$A8.\ M(\downarrow x) \vee M(\downarrow y) \vdash M(\downarrow (x \vee y))$

$A9.\ N(\downarrow x)\, M(\downarrow y) \vdash M(\downarrow (xy))$

$A10.\ N(\downarrow x) \vee N(\downarrow y) \vdash N(\downarrow (x \vee y))$

$A11.\ N(\downarrow (x \vee y)) \vdash N(\downarrow x) \vee M(\downarrow y)$

$A12.\ M(\downarrow x)\, ?\, M(\downarrow y) \vdash ?\, M(\downarrow (xy))$

$A13.\ ?\, M(\downarrow x)\, ?\, M(\downarrow y) \vdash ?\, M(\downarrow (xy))$

$A14.\ N(\downarrow x) \vdash N(\downarrow (N(\downarrow x)))$

$A15.\ M(\downarrow (M(\downarrow x))) \vdash M(\downarrow x)$

Правила вывода:

$R1$. Если $x \vdash y$, то $N(\downarrow x) \vdash N(\downarrow y)$

$R2$. Если $x \vdash y$, то $M(\downarrow x) \vdash M(\downarrow y)$

Система S_c^{mo} основной модальной логики для классического случая отличается от S_n^{mo} тем, что исключаются аксиомные схемы $A12$ и $A13$, а аксиомные схемы $A3$ — $A6$ заменяются на такие:

$N(\downarrow x) \vdash \sim M(\downarrow \sim x)$

$\sim M(\downarrow \sim x) \vdash N(\downarrow x)$

§ 8. Логические модальности

Употребляют выражения «логически возможно», «логически необходимо» и «логически случайно». Введем для этих предикатов символы LM, LN и LC. Их свойства определяются аксиомными схемами A^* и правилом R^*1:

A^*1. $LN(\downarrow x) \vdash \sim LM(\downarrow \sim x)$

A^*2. $\sim LM(\downarrow \sim x) \vdash LN(\downarrow x)$

A^*3. $LN(\downarrow x) \vdash N(\downarrow x)$

A^*4 $M(\downarrow x) \vdash LM(\downarrow x)$

A^*5. $LC(\downarrow x) \vdash LM(\downarrow x)\, LM(\downarrow \sim x)$

A^*6. $LM(\downarrow x)\, LM(\downarrow \sim x) \vdash LC(\downarrow x)$

R^*1. Если $\vdash x$, то $\vdash LN(\downarrow x)$.

$T1$. $\vdash M(\downarrow x) \vee M(\downarrow \sim x)$.

§ 9. Модальность и существование

Соотношение модальных и экзистенциальных предикатов (помимо аналогии) определено аксиомными схемами $AV1$ и $AV2$. Кроме того, имеют силу теоремные схемы:

$T1$. $E(\downarrow x) \vdash M(\updownarrow x)$

$T2$. $N(\updownarrow x) \vdash E(\downarrow x)$

$T3$. $\cup(\downarrow x) \vdash N(\downarrow x)$

$T4$. $\neg \cup(\downarrow x) \vdash M(\downarrow \sim x)$

$T5$. $C(\downarrow x) \vdash \neg \cup(\downarrow x)$

$T6$. $\neg M(\downarrow x) \vdash \neg E(\downarrow x)$

§ 10. Модальность и условность

Формула $\neg M(\downarrow (x \sim y)) \vdash (x \mapsto y)$ в S_n^{mi} не является доказуемой (поскольку не является тавтологией), а формула $\sim M(\updownarrow (x \sim y)) \vdash (x \rightarrow y)$ недоказуема в S_c^{mi}. Так что $\neg M(\downarrow (x \sim y))$ и $\sim M(\downarrow (x \sim y))$ нельзя рассматривать как сокращение для $(x \rightarrow y)$.

§ 11. Модальности и кванторы

Имеет место совпадение теории кванторов и теории модальностей в следующем смысле. Пусть $(x \vdash y)^q$ есть формула теории кванторов, а $(x \vdash y)^m$ — формула теории модальностей. Пусть одна из них образуется из другой путем следующих замен: 1) все вхождения вида $(\alpha \forall a) z$ заменяются на вхождения $(\alpha\ \mathrm{N} a)\ z$ (или наоборот); 2) все вхождения вида $(\alpha \exists a)\ z$ заменяются на вхождения вида $(\alpha\ \mathrm{M}\ a)\ z$ (или наоборот). В таком случае будет иметь силу теорема:

$MT1$. Если $(x \vdash y)^q$ доказуема, то $(x \vdash y)^m$ доказуема; и наоборот.

Справедливость $MT1$ усматривается из соответствия определенных аксиомных и теоремных схем и правил вывода модальной логики с аксиомными схемами и правилами вывода теории кванторов.

Будет иметь силу также теорема $MT2$, аналогичная $MT1$, но в которой $(x \vdash y)^m$ образуется из $(x \vdash y)^q$ и (наоборот) путем следующих замен: 1) все вхождения вида $(\alpha \forall a)\ z$ заменяются на вхождения вида $\alpha\ N\ (\downarrow z)$ (или наоборот); 2) все вхождения вида $(\alpha \exists a)\ z$ заменяются на вхождения вида $\alpha\ M\ (\downarrow z)$.

§ 12. Вероятностная логика

К числу модальных предикатов относятся такие предикаты, в которых фиксируется степень возможности наступления событий или вероятность. Система S_n^{mp} вероятностной логики образуется благодаря следующим дополнениям к S_n^m.

Алфавит: $p = \alpha$, $p > \alpha$, $p < \alpha$, $p \geqslant \alpha$, $p \leqslant \alpha$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, суть предикаты вероятности («возможно со степенью α», «возможно со степенью большей, чем α» и т. д.).

Вместо символов вида $(\downarrow x) \leftarrow (p = \alpha)$, $(\downarrow x) \leftarrow (p \geqslant \geqslant \alpha)$ и т. п. будем употреблять более удобные адекватные им общепринятые символы вида $p(\downarrow x) = \alpha$, $p(\downarrow x) \geqslant \alpha$ и т. п. («Вероятность того, что наступит $\downarrow x$, равна α» и т. д.).

Аксиомные схемы S_n^{mp}:

$A1.\ \vdash 0 \leqslant p(\downarrow x) \leqslant 1$

$A2.\ \vdash (p(\downarrow x) = 0) \rightarrow \neg \mathrm{M}(\downarrow x)$

$A3.\ \vdash \neg \mathrm{M}(\downarrow x) \rightarrow (p(\downarrow x) = 0)$

$A4.\ \vdash (p(\updownarrow x) = 1) \rightarrow N(\downarrow x)$

$A5.\ \vdash N(\downarrow x) \rightarrow (p(\downarrow x) = 1)$

$A6.\ \vdash \mathrm{M}(\downarrow x) \rightarrow (0 < p(\updownarrow x))$

$A7.\ \vdash (0 < p(\downarrow x)) \rightarrow M(\downarrow x)$

$A8.\ \vdash M(\downarrow \sim x) \rightarrow (p(\updownarrow x) < 1)$

$A9.\ \vdash (p(\downarrow x) < 1) \rightarrow M(\downarrow \sim x)$

$A10.\ \vdash p \downarrow (x^1 \cdot \ldots \cdot x^n) \leqslant min(p(\downarrow x^1), \ldots, p(\downarrow x^n))$

$A11.\ \vdash p \downarrow (x^1 \vee \ldots \vee x^n) \geqslant max(p(\updownarrow x^1), \ldots, p(\downarrow x^n))$

$A12.\ \vdash (x \rightarrow (p(\downarrow y) = \alpha))(p(\downarrow x) = \beta) \rightarrow (p(\downarrow y) \leqslant \leqslant min(\alpha, \beta))$

$A13.\ \vdash (p(\downarrow (x \rightarrow y)) = \alpha) \rightarrow (x \rightarrow (p(\downarrow y) = \alpha))$

$A14.\ \vdash (x \rightarrow (p(\downarrow y) = \alpha)) \rightarrow (p \downarrow (x \rightarrow y) = \alpha)$

Возможны различные соглашения для установления вероятности событий в случаях, указанных в $A12$. В частности,

$A{*}12.\ \vdash (x \rightarrow (p(\downarrow y) = \alpha)(p(\downarrow x) = \beta) \rightarrow (p(\downarrow y) = \alpha \cdot \beta)$

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

ЛОГИКА ОТНОШЕНИЙ

§ 1. Предикаты отношений

Предикаты отношений суть предикаты вида «первый ближе второго», «первый раньше второго», «первый правее второго», «первый находится между вторым и третьим» и т. п. Среди них выделяются две группы предикатов:

1) предикаты сравнения;

2) предикаты порядка.

Свойства этих предикатов рассматриваются в логике отношений.

Выражения «способ сравнения» и «способ установления порядка» («способ упорядочивания») здесь не определяется. Заметим лишь, что рассматриваемые ниже правила логики имеют силу лишь при том условии, что эти способы так или иначе известны и являются стандартными для предметов того или иного рода. В частности, в рамках одного и того же утверждения предполагается тождество способов установления порядка и сравнения для всех фигурирующих в них предикатов порядка и сравнения.

§ 2. Логика сравнения

Система S_n^{r1} теории сравнения для неклассического случая образуется благодаря таким дополнениям к ранее принятым системам.

Алфавит:

1) $>$ — знак превосходства («превосходит»);

2) $<$ — знак, противоположный превосходству («уступает»);

3) $=$ — знак тождества («тождественно»).

$D1$. Если a есть предикат, то $(> a)$, $(< a)$ и $(= a)$ суть предикаты сравнения.

$D2$. Высказывания, содержащие предикаты сравнения, суть высказывания сравнения.

Высказывания сравнения читаются так:

1) $(\alpha > c)\ (a,\ b)$ — «a превосходит (не превосходит, неопределенно превосходит) $в$ по признаку c»;

2) $(\alpha < c)\ (a,\ b)$ — «a уступает (не уступает, неопределенно уступает) b по признаку c»;

3) $(\alpha = c)\ (a,\ b)$ — «a тождественно (не тождественно, неопределенно тождественно) b по признаку c».

В дальнейшем вместо символов вида $(\alpha > c)\ (a,\ b)$, $(\alpha < c)\ (a,\ b)$ и $(\alpha = c)\ (a,\ b)$ будем для простоты и наглядности употреблять символы, соответственно $(a\alpha\ (> c)\ b)$; $(a\,\alpha\ (< c)\ b)$ и $(a\,\alpha(= c)\ b)$. Предикат c будем опускать, полагая, что в рамках одного и того же утверждения во всех высказываниях сравнения имеется в виду один и тот же предикат c.

Аксиомные схемы AI:

1. $\vdash (a \urcorner > a)$
2. $(a > b) \vdash (b \urcorner > a)$
3. $(a \urcorner > b) \vdash ((b > a) : (a = b))$
4. $(a\,?> b) \vdash (b\,?> a)$
5. $(a > b)\,(b > c) \vdash (a > c)$
6. $(a > b)\,(b = c) \vdash (a > c)$
7. $(a \urcorner > b)\,(b \urcorner > c) \vdash (a \urcorner > c)$
8. $(a\,?> b)\,(b = c) \vdash (a\,?> c)$
9. $(a < b) \vdash (b > a)$
10. $(a > b) \vdash (b < a)$
11. $(a \urcorner < b) \vdash (a > b) : (a = b)$

12. $(a > b) : (a = b) \vdash (a \urcorner < b)$
13. $(a\,? < b) \vdash (b\,? > a)$
14. $(b\,? > a) \vdash (a\,? < b)$
15. $(a = b) \vdash (a \urcorner > b)\,(b \urcorner > a)$
16. $(a \urcorner > b)\,(b \urcorner > a) \vdash (a = b)$
17. $(a \urcorner = b) \vdash (a > b) : (b > a)$
18. $(a > b) : (b > a) \vdash (a \urcorner = b)$
19. $(a\,? = b) \vdash ((a\,? > b) \vee (b\,? > a)) \sim (a > b) \sim (b > a)$
20. $((a\,? > b) \vee (b\,? > a)) \sim (a > b) \sim (b > a) \vdash (a\,? = b)$

Следствия AI:

$T1$. $\vdash \sim (a > a)$
$T2$. $(a > b) \vdash \sim (b > a)$
$T3$. $(a\,? > b) \vdash \sim (a > b)$
$T4$. $\vdash \sim ((a > b)\,(b > a))$
$T5$. $\vdash \sim ((a > b)\,(a \urcorner > b))$

Аксиомные схемы AII:

1. $(a \leftarrow c)\,(b \urcorner \leftarrow c) \vdash (a\,(> c)\,b)$
2. $(a \urcorner \leftarrow c)\,(b \urcorner \leftarrow c) \vdash (a\,(= c)\,b)$
3. $(a\,? \leftarrow c)\,(b\,? \leftarrow c) \vdash (a\,(= c)\,b)$
4. $(a \leftarrow c)\,(b\,? \leftarrow c) \vdash (a\,?\,(> c)\,b)$
5. $(a\,? \leftarrow c)\,(b \urcorner \leftrightarrow c) \vdash (a\,?\,(> c)\,b)$

Классический случай S_c^{r1} имеет такой вид.
Аксиомные схемы A^cI:

1. $\vdash \sim (a > a)$
2. $(a > b) \vdash \sim (b > a)$
3. $\sim (a > b) \vdash (b > a) : (a = b)$
4. $(a > b)\,(b > c) \vdash (a > c)$
5. $(a > b)\,(b = c) \vdash (a > c)$
6. $\sim (a > b) \sim (b > c) \vdash \sim (a > c)$

7. $(a < b) \vdash (b > a)$

8. $(a > b) \vdash (b < a)$

9. $(a = b) \vdash \sim (a > b) \sim (b > a)$

10. $\sim (a > b) \sim (b > a) \vdash (a = b)$

Аксиомные схемы A^cII:

1. $(a \leftarrow c) \sim (b \leftarrow c) \vdash (a\,(>c)\,b)$

2. $\sim (a \leftarrow c) \sim (b \leftarrow c) \vdash (a\,(=c)\,b)$

§ 3. Логика порядка

Система S_n^{r2} теории порядка для неклассического случая получается благодаря таким дополнениям к ранее принятым системам.

Алфавит: знаки $>$, $<$ и $=$, как в S_n^{r1}.

$D1$. Если c есть субъект, то $(> c)$, $(< c)$ и $(= c)$ суть предикаты порядка.

Высказывания, содержащие предикаты порядка, суть порядковые высказывания. Они читаются так:

1) $\alpha\ (> c)\ (a,\ b)$ — «a превосходит (не превосходит, неопределенно превосходит) b по порядку относительно c»;

2) $\alpha\ (< c)\ (a,\ b)$ — «a уступает (не уступает, неопределенно уступает) b по порядку относительно c»;

3) $\alpha\ (= c)\ (a,\ b)$ — «a тождественно (не тождественно, неопределенно тождественно) b по порядку относительно c».

Как и в § 2, вместо символов $\alpha\ (> c)\ (a,\ b)$, $\alpha\ (< c)$ $(a,\ b)$ и $\alpha\ (= c)\ (a,\ b)$ будем употреблять более простые и наглядные символы соответственно $a\,\alpha(> c)\,b$, $a\,\alpha(< c)\,b$ и $a\,\alpha\,(= c)\,b$. Символ c будем опускать на тех же основаниях, что и c в § 2.

Аксиомные схемы логики порядка имеют тот же вид, что и аксиомные схемы AI логики сравнения, с той лишь разницей, что в них вместо предиката c повсюду фигурирует субъект c. Аналогично для классического случая.

§ 4. Интерпретация

Примем следующую интерпретацию (в пунктах 1—5 знак c есть предикат или субъект):

1) область значения субъектов — множество натуральных чисел;

2) $a\ (> c)\ b$ имеет значение 1, если и только если значение a больше значения b; $a \urcorner (> c)\ b$ имеет значение 1, если и только если значение a равно или меньше значения b; $a?\ (> c)\ b$ имеет значение 1, если и только если соотношение a и b не известно;

3) $a\, \alpha\ (< c)\ b$ равнозначна формуле, стоящей справа от знака следования в схемах соответственно 9, 11, 13;

4) $a\, \alpha\ (= c)\ b$ равнозначна формуле, стоящей справа от знака следования в схемах соответственно 15, 17, 19;

5) если c^1 и c^2 различны, то значения $a\, \alpha\ (> c^1)\ b$ и $a\, \alpha\ (> c^2)\ b$ независимы;

6) если $a \leftarrow c$ и $b \urcorner \leftarrow c$ имеют значение 1, то значение a больше значения b; соотношение значений a и b для пар $a \leftarrow c$ и $b? \leftarrow c$, $a? \leftarrow c$ и $b \urcorner \leftarrow c$ не известно; если $a \urcorner \leftarrow c$ и $b \urcorner \leftarrow c$ имеют значение 1, то значения a и b равны; аналогично для пары $a? \leftarrow c$ и $b? \leftarrow c$.

*MT*1. Все доказуемые в принятых системах формулы суть тавтологии.

*MT*2. Если c^1 и c^2 различны, то формулы $a\, \alpha\ (> c^1)\ b \vdash$ $\vdash a\, \alpha\ (> c^2)\ b$ недоказуемы, поскольку они не являются тавтологиями. Аналогично — для $<$ и $=$.

§ 5. Производные термины порядка

Через предикаты порядка, рассмотренные выше, определяется совокупность порядковых терминов «находится между», «структура», «ряд» и т. п. Они рассматривались в работах [3, 7].

§ 6. Система S^{r3}

Алфавит: R, R^1, R^2,... — знаки порядка («до этого», «после этого», «в десяти метрах от», «через три часа» и т. п.)

$D1$. Если R есть знак порядка, а x есть высказывание, то $(R \downarrow x)$ есть предикат порядка.

Высказывания вида $(R \downarrow x)$ $(\downarrow y)$ читаются так: «$\downarrow x$ имеет место в отношении R к $\downarrow x$». Например, «Гром прогремел через пять секунд после того, как сверкнула молния». В дальнейшем ради упрощения стрелки будем опускать, полагая при этом, что все употребляемые термины суть термины типа $\downarrow x$.

Аксиомные схемы S^{r3}:

1. $\sim (Rx)\, y \vdash (Rx) \sim y$
2. $(Rx) \sim y \vdash \sim (Rx)\, y$
3. $(Rx)\, y\, (Rx)\, z \vdash (Rx)\, (yz)$
4. $(Rx)\, (yz) \vdash (Rx)\, y\, (Rx)\, z$
5. $(Rx)\, y \vee (Rx)\, z \vdash (Rx)\, (y \vee z)$
6. $(Rx)\, (y \vee z) \vdash (Rx)\, y \vee (Rx)\, z$
7. $((R^1x)\, (R^2y))\, z \vdash (R^1x)\, z\, (R^2y)\, z$
8. $(R^1x)\, z\, (R^2y)\, z \vdash ((R^1x)\, (R^2y))\, z$
9. $((R^1x) \vee (R^2y))\, z \vdash (R^1x)\, z \vee (R^2y)\, z$
10. $(R^1x)\, z \vee (R^2y) z \vdash ((R^1x) \vee (R^2y))\, z$
11. $(R\, (x \vee y))\, z \vdash ((Rx) \vee (Ry))\, z$
12. $((Rx) \vee (Ry))\, z \vdash (R\, (x \vee y))\, z$
13. $(R\, (xy))\, z \vdash ((Rx)\, (Ry))\, z$
14. $((Rx)\, (Ry))\, z \vdash (R\, (xy))\, z$
15. $(R^1x)\, y\, (aR^1b \to bR^2a) \vdash (R^2y)\, x)$

§ 7. Упорядоченные конъюнкции и дизъюнкции

Встречаются высказывания вида «x и затем y», «x и перед этим y», «x и слева от этого y» и т. п. Эти своеобразные упорядоченные конъюнкции нередко употребляются неявно и смешиваются с обычными. Аналогично обстоит дело с упорядоченными дизъюнкциями. Именно на этом смешении базируется, на наш взгляд, исключение некоторых законов классической логики в «логике микромира». В общем случае упомянутые конъюнкции и дизъюнкции имеют вид

$$x\,(Rx)\,y \qquad x \bigvee (Rx)\,y,$$

где R есть какое-то отношение порядка («x и в отношении R к этому y», «x или в отношении R к этому y»).

Для рассматриваемых высказываний не имеют силы формулы вида

$$x\,(Rx)\,y \vdash y\,(Ry)\,x \qquad x \bigvee (Rx)\,y \vdash y \bigvee (Ry)\,x$$

Для них имеют силу лишь формулы вида AI:

1. $(x\,(R^1x)\,y)\,(aR^1b \to bR^2a) \vdash (y\,(R^2y)\,x)$
2. $(x \bigvee (R^1x)\,y)\,(aR^1b \to bR^2a) \vdash (y \bigvee (R^2y)\,x)$

В остальном для упорядоченных конъюнкций и дизъюнкций имеют силу правила, аналогичные обычным, например — такие:

$T1.$ $\sim (x\,(Rx)\,y) \dashv\vdash \sim x \bigvee (Rx) \sim y$

$T2.$ $\sim (x \bigvee (Rx)\,y) \dashv\vdash \sim x\,(Rx) \sim y$

$T3.$ $(x \bigvee (R^1x)\,y)\,(R^2a)\,z \vdash x\,(R^2a)\,z \bigvee (R^1x)\,y$

Примем также аксиомные схемы AII:

1. $x\,(R^1x)\,y\,(R^2y)\,z \vdash (x\,(R^1x)\,y)\,(y\,(R^2y)\,z)$
2. $(x\,(R^1x)\,y)(y\,(R^2y)\,z) \vdash x\,(R^1x)\,y\,(R^2y)\,z$
3. $x \bigvee (R^1x)\,y \bigvee (R^2y)\,z \vdash (x \bigvee (R^1x)\,y)\,(y \bigvee (R^2y)\,z)$
4. $(x \bigvee (R^1x)\,y)\,(y \bigvee (R^2y)\,z) \vdash x \bigvee (R^1x)\,y \bigvee (R^2y)\,z$
5. $x \bigvee (R^1x)\,y\,(R^2y)\,z \vdash (x \bigvee (R^1x)\,y)\,(y\,(R^2y)\,z)$

6. $(x \vee (R^1x)\, y)\, (y\, (R^2y)\, z) \vdash x \vee (R^1x)\, y\, (R^2y)\, z$

7. $x\, (R^1x)\, y \vee (R^2y)\, z \vdash (x\, (R^1x)\, y)\, (y \vee (R^2y)\, z)$

8. $(x\, (R^1x)\, y)\, (y \vee (R^2y)\, z) \vdash x\, (R^1x)\, y \vee (R^2y)\, z$

Обычные (коммутативные) конъюнкцию и дизъюнкцию можно рассматривать как частный случай упорядоченных приняв аксиомные схемы $AIII$:

1. $(x\, (Rx)\, y \to y\, (Ry)\, x)\, (y\, (Ry)\, x \to x\, (Rx)\, y) \vdash xy$
2. $xy \vdash (x\, (Rx)\, y \to y\, (Ry)\, x)\, (y\, (Ry)\, x \to x\, (Rx)\, y)$
3. $(x \vee (Rx)\, y \to y \vee (Ry)\, x)\, (y \vee (Ry)\, x \to x \vee (Rx)\, y) \vdash$
$\vdash x \vee y$
4. $x \vee y \vdash (x \vee (Rx)\, y \to y \vee (Ry)\, x)\, (y \vee (Ry)\, x \to$
$\to x \vee (Rx)\, y)$

§ 8. Логика изменения

Система S^{ch} получается благодаря таким дополнениям к ранее изложенным системам:

Алфавит: $\Rightarrow$ — предикат превращения.

Высказывание $(\Rightarrow)\ (\downarrow x,\ \downarrow y)$ читается так: «Ситуация, в которой имело место $\downarrow x$ (было истинно x), превратилась в ситуацию (или заменилась на ситуацию), в которой имеет место $\downarrow y$ (в которой истинно y)». Вертикальные стрелки у высказываний будем для упрощения записи опускать, полагая, что буквы x, y, z,... суть термины $\downarrow x$, $\downarrow y$, $\downarrow z$,... Будем употреблять более наглядную запись высказываний в форме $x\, \alpha \Rightarrow y$, где α означает $\neg$ или ? или отсутствие обоих. Выражения «вслед за этим» и «одновременно с этим» здесь не определяются.

$D1$. Элементарные высказывания изменения суть высказывания $Q\ (a) \Rightarrow \neg\, Q\ (a)$ и $\neg\, Q\ (a) \Rightarrow Q\ (a)$, где Q есть предикат, и только эти.

$D2$. Высказывания изменения:

1) элементарные высказывания изменения суть высказывания изменения;

2) если $x \Rightarrow y$ и $z \Rightarrow v$ суть высказывания изменения, то $(x \Rightarrow y)\ (R\ (x \Rightarrow y)\ \ (z \Rightarrow v))$ есть высказывание изменения при условии, что $R\ (x \Rightarrow y)$ есть «одновременно с $\downarrow (x \Rightarrow y)$» или «вслед за $\downarrow (x \Rightarrow y)$»;

3) нечто есть высказывание изменения лишь в силу 1 и 2.

Аксиомные схемы $A\mathrm{I}$ (символ R означает «вслед за этим» или «после этого»):

1. $Q\,(a)\,(R\,(Q\,(a)))\urcorner Q\,(a) \vdash (Q\,(a) \Rightarrow \urcorner Q\,(a))$
2. $(Q\,(a) \Rightarrow \urcorner Q\,(a)) \vdash Q\,(a)\,(R\,(Q\,(a)))\urcorner Q\,(a)$
3. $\urcorner Q\,(a)\,(R\,(\urcorner Q\,(a)))\,Q\,(a) \vdash (\urcorner Q\,(a) \Rightarrow Q\,(a))$
4. $(\urcorner Q\,(a) \Rightarrow Q\,(a)) \vdash \urcorner Q\,(a)\,(R\,(\urcorner Q\,(a)))\,Q\,(a)$

Аксиомные схемы $A\mathrm{I}$ означают, что предикат превращения (изменения) является производным от предикатов порядка.

Аксиомные схемы $A\mathrm{II}$:

1. $(x \Rightarrow y) \vdash y$
2. $(x\urcorner \Rightarrow y) \vdash (x \Rightarrow \sim y)$
3. $(x \Rightarrow \sim y) \vdash (x\urcorner \Rightarrow y)$
4. $(x\,? \Rightarrow y) \vdash \sim x \sim y$
5. $\sim x \sim y \vdash (x\,? \Rightarrow y)$

Аксиомные схемы $A\mathrm{III}$:

1. $(x \Rightarrow y)\,(R\,(x \Rightarrow y))\,(y \Rightarrow z) \vdash (x \Rightarrow z)$,

где R есть «вслед за этим» («затем»).

2. $(x \Rightarrow y)\,(R\,(x \Rightarrow y))\,(z \Rightarrow v) \vdash (xz \Rightarrow yv)$,

где R есть «одновременно с этим».

3. $((x \Rightarrow y) \rightarrow (R\,(x \Rightarrow y))\,(z \Rightarrow v)) \vdash (y \rightarrow (Ry)\,v)$,

где R есть «вслед за этим».

Для классического случая достаточно в аксиомных схемах $A\mathrm{I}$, $A\mathrm{II}$ и $A\mathrm{III}$ заменить $\urcorner$ на $\sim$, а аксиомные схемы $A\mathrm{II}4$ и $A\mathrm{II}5$ исключить.

Интерпретация:

1) если $x \Rightarrow y$ имеет значение 1, то x имеет значение 0 и y имеет значение 1; $x \Rightarrow y$ имеет значение 0, если y имеет значение 0;

2) $x \urcorner \Rightarrow y$ равнозначно $x \Rightarrow \sim y$;

3) $x ? \Rightarrow y$ равнозначно $\sim x \sim y$;

4) $(R(x \Rightarrow y))(y \Rightarrow z)$ равнозначно $x \Rightarrow z$;

5) $(R(x \Rightarrow y))(z \Rightarrow v)$ равнозначно $xz \Rightarrow yv$.

*MT*1. Все формулы, доказуемые в изложенной системе, суть тавтологии (и система непротиворечива).

§ 9. Физическое следование

Система S^{ph} физического следования (рассматривалась в [3, 4]) получается благодаря таким дополнениям к ранее принятым системам.

Условные высказывания вида $x \cdot \alpha \rightarrow (Rx)\, y$ суть высказывания о физическом следовании.

Аксиомные схемы *A*I:

1. $(x \rightarrow (Rx)\, y) \vdash (\forall (\downarrow x))((Rx)\, y)$
2. $(\forall (\downarrow x))((Rx)\, y \vdash (x \rightarrow (Rx)\, y)$
3. $(x \rightarrow (Rx)\, y) \vdash N(\downarrow ((Rx)\, y))$
4. $N(\downarrow ((Rx)\, y)) \vdash (x \rightarrow (Rx)\, y)$
5. $(x \urcorner \rightarrow (Rx)\, y) \vdash (\exists (\downarrow x))((Rx) \sim y)$
6. $(\exists (\downarrow x))((Rx) \sim y) \vdash (x \urcorner \rightarrow (Rx)\, y)$
7. $(x \urcorner \rightarrow (Rx)\, y) \vdash M(\downarrow ((Rx) \sim y))$
8. $M(\downarrow ((Rx) \sim y)) \vdash (x \urcorner \rightarrow (Rx)\, y)$

Следствия *A*I:

*T*1. $(x ? \rightarrow (Rx)\, y) \dashv\vdash (? \forall (\downarrow x))((Rx)\, y)$

*T*2. $(x ? \rightarrow (Rx)\, y) \dashv\vdash ? N(\downarrow ((Rx)\, y))$

*T*3. $(x ? \rightarrow (Rx)\, y) \dashv\vdash (? \exists (\downarrow x))((Rx) \sim y)$

*T*4. $(x ? \rightarrow (Rx)\, y) \dashv\vdash ? M(\downarrow ((Rx) \sim y))$

Аксиомные схемы AII:

1. $(x \to (R^1x)\,y)\,(aR^1b \to bR^2a) \vdash (\sim y \to (R^2 \sim y) \sim x)$
2. $(x \to (R^1x)\,y)\,(y \to (R^2y)\,z)\,((aR^1b)\,(bR^2c) \leftrightarrow (aR^3c)) \vdash$
$\vdash (x \to (R^3x)\,z)$
3. $(x \to (Rx)\,y)\,(y \to z) \vdash (x \to (Rx)\,z)$
4. $(x \to (R^1x)\,y)\,(x \to (R^2x)\,z)\,((aR^1b)\,(aR^2c) \to$
$\to (aR^3\,(b,c))) \vdash (x \to (R^3x)\,(yz))$

Следствия A II:

$T1$. $(x \to (Rx)\,(yz)) \dashv\vdash (x \to (Rx)\,y)\,(x \to (Rx)\,z)$
$T2$. $(x \to (Rx)\,y) \vee (x \to (Rx)\,z) \vdash (x \to (Rx)\,(y \vee z))$

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

НОРМАТИВНЫЕ ПРЕДИКАТЫ

Нормативные высказывания суть высказывания, субъекты которых суть названия действий, а предикаты суть выражения «обязательно», «разрешено», «запрещено», «безразлично» и т. п. На эти предикаты распространяются общие правила логики, относящиеся к любым предикатам. Что касается специфических свойств этих предикатов, то в рамках логики можно лишь установить их взаимоотношения. Да и то это будет не столько расширение логики, сколько отнесение нормативных предикатов к определенным логическим типам предикатов (дедуктивно связанных, логически взаимозаменимых и т. п.).

Система S_n^n нормативной логики образуется благодаря таким дополнениям к ранее рассмотренным системам.

Алфавит:

1) O — предикат «обязательно»;
2) P — предикат «разрешено»;
3) $З$ — предикат «запрещено»;
4) $Б$ — предикат «безразлично»;
5) $Н$ — предикат «необязательно».

Аксиомные схемы AI:

1. $O(a) \vdash P(a)$

2. $\neg P(a) \vdash \neg O(a)$

3. $?P(a) \vdash \sim O(a)$

Аксиомные схемы AII:

1. $O(a) \dashv\vdash \neg P(\tilde{a})$
2. $\neg O(a) \dashv\vdash P(\tilde{a})$
3. $?O(a) \dashv\vdash ?P(\tilde{a})$

Аксиомные схемы AIII:

1. $З(a) \dashv\vdash \neg P(a)$
2. $\neg З(a) \dashv\vdash P(a)$
3. $?З(a) \dashv\vdash ?P(a)$

Аксиомные схемы AIV:

1. $Б(a) \dashv\vdash P(a)P(\tilde{a})$
2. $\neg Б(a) \dashv\vdash \neg P(a) \vee \neg P(\tilde{a})$
3. $?Б(a) \dashv\vdash (?P(a) \vee ?P(\tilde{a})) \sim \neg P(a) \sim \neg P(\tilde{a})$

Аксиомные схемы AV:

1. $Н(a) \dashv\vdash \neg O(a)$
2. $\neg Н(a) \dashv\vdash O(a)$
3. $?Н(a) \dashv\vdash ?O(a)$

Согласно AI предикаты O и P дедуктивно связаны, причем первый категорически сильнее второго. Согласно AII предикаты O и P логически взаимозаменимы. Логически взаимозаменимы также предикаты $З$ и P (согласно AIII) и предикаты $Н$ и O (согласно AV). Предикат $Б$ определяется через P (согласно AIV).

Система S_c^n для классического случая получается путем исключения всего, что связано с оператором ?, и замены $\neg$ на $\sim$. Аксиомные схемы S_c^n таковы:

1. $O(a) \vdash P(a)$
2. $\sim P(a) \vdash \sim O(a)$
3. $O(a) \dashv\vdash \sim P(\tilde{a})$
4. $З(a) \dashv\vdash \sim P(a)$
5. $Б(a) \dashv\vdash P(a)P(\tilde{a})$
6. $Н(a) \dashv\vdash \sim O(a)$

Как видим, нормативная логика сама по себе есть нечто очень тривиальное. Сложности здесь возникают в результате неясности терминологии и неявных допущений. В частности, в случаях употребления нормативных предикатов неявно предполагаются кванторы, которые в логических теориях не выявляются. Например, высказывание «Действие *a* разрешено» фактически употребляется как «Всякое действие, называемое *a*, разрешено » (подобно тому, как высказывание «Сумма углов треугольника равна двум прямым» фактически употребляется как высказывание «Сумма углов всякого треугольника равна двум прямым»).

Собственно говоря, при более полной (чем это сделано у нас) разработке теории терминов (и теории предикации в том числе) должен будет измениться, надо думать, и вид таких разделов логики как модальная и экзистенциальная логика.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сформулируем подробнее правила приписывания значений высказываниям с кванторами и формулам следования в случае прямой интерпретации.

Пусть дана формула $x \vdash y$. В высказываниях x и y все вхождения вида $\sim (a^1 a^2 ... a^n)$ (где $n \geqslant 2$), $\sim (a^1 \vee \vee a^2 \vee ... \vee a^n)$, $\sim \sim a$, $(\exists a)\ b$ заменяем формулами соответственно вида $\sim a^1 \vee \sim a^2 \vee ... \vee \sim a^n$, $\sim a^1 \cdot \sim a^2 ... \sim a^n$, a, $\sim (\forall a) \sim b$. Все вырожденные кванторные группы исключаются. Полученные высказывания x^* и y^* равнозначны соответственно x и y, а формула $x \vdash y$ равнозначна $x^* \vdash y^*$. Последующие правила относятся к высказываниям и формулам x, y, $x \vdash y$, приведенным к виду x^*, y^*, $x^* \vdash y^*$.

Правила для конъюнкции, дизъюнкции и отрицания обычные (с той лишь разницей, что дизъюнкции и конъюнкции могут быть сколь угодно местными). Дополнительные правила для кванторов: 1) если вхождению $(\forall a)\ b$ в некоторое высказывание приписали значение 1 (или 0), то всем остальным вхождениям $(\forall a)\ b$ в это же высказывание точно так же приписывается значение 1 (соответственно 0); 2) если $(\forall a)\ b$ приписали значение 1, то должны b приписать значение 1; если $(\forall a)\ b$ приписали значение 0, то этим самым значение b еще не определяется (оно не зависит в этом случае от значения $(\forall a)\ b$); 3) если приписали b значение 0, то должны $(\forall a)\ b$ приписать значение 0; если приписали b значение 1, то значение $(\forall a)\ b$ этим еще не определяется.

Правила для формул следования. Выясняем, можно или нет приписать x значение 1 (или y значение 0) в формуле $x \vdash y$ в силу правил для конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, а также кванторов. Если x есть противоречие (или y есть тавтология) в силу этих правил, то $x \vdash y$ есть тавтология. Если же x не есть противоречие в силу этих правил (x может принять значение 1), а y не есть тавтология, то поступаем так: приписываем x значение 1 (или y значение 0) и рассматриваем последствия этого шага для высказываний, входящих в x (соответственно в y), и затем для высказываний, входящих в y (соответственно в x), и для y (для x) в целом. Например, приписав x значение 1, мы должны приписать обоим a и b значения 1, если x есть ab, приписать b значение 1, если x есть $(\forall a)\, b$, приписать хотя бы одному из a и b значение 1, если x есть $a \vee b$, и т. п. В этом случае примем такие дополнительные правила для кванторов: 4) если приписав x значение 1 (y значение 0), мы вследствие этого вынуждены приписать значение 1 (не имеем возможности приписать значение 0) некоторому высказыванию b, входящему в y (входящему соответственно в x), то мы должны $(\forall a)\, b$, входящему в y (входящему соответственно в x), приписать значение 1; 5) если же приписав x значение 1 (y значение 0), мы вследствие этого не вынуждены приписывать b значение 1 (имеем возможность приписать ему значение 0), то мы должны $(\forall a)\, b$ приписать значение 0.

$D1$. Формула $x \vdash y$ есть тавтология, если и только если она принимает значение 1 для всех вариантов (комбинаций) приписывания значений частям x и y по установленным правилам.

Упомянутые в $D1$ варианты возникают за счет того, что возможны различные комбинации значений $a^1, \ldots, a^n$ для случаев, когда $a^1 \vee \ldots \vee a^n$ имеет значение 1 и $a^1 \ldots a^n$ имеет значение 0, а также различные комбинации значений $(\forall a)\, b$ и b для случаев, когда b имеет значение 1 и $(\forall a)\, b$ имеет значение 0.

Рассмотрим два примера. Формулу $(\forall a)(\exists b)\, x \vdash$ $\vdash (\exists b)(\forall a)\, x$ приводим к виду $(\forall a) \sim (\forall b) \sim x \vdash \sim (\forall b)$ $\sim (\forall a)\, x$. Приписываем посылке значение 1. Значит должны $\sim (\forall b) \sim x$ приписать значение 1, а $(\forall b) \sim x$ значение 0. Значение $\sim x$ не зависит от $(\forall b) \sim x$, т. е. можем ему приписать как значение 1, так и значение 0. Но в таком случае $(\forall a)\, x$ имеет значение 0, его отрицание — значение 1, $(\forall b) \sim (\forall a)\, x$ — значение 1, а его отрицание — значение 0. Значит, наша формула не есть тавтология. Формула $(\forall a)\, x\, (\exists a)\, y \vdash (\exists a)\, (xy)$ приводится к виду $(\forall a)\, x \sim (\forall a) \sim y \vdash \sim (\forall a) (\sim x \vee \sim y)$. Приписав посылке значение 1, мы должны приписать $(\forall a)\, x$ и $\sim (\forall a) \sim y$ значения 1, x значение 1 и $(\forall a) \sim y$ значение 0. Значит обоим x и y можно приписать значение 1, а $\sim x \vee \sim y$ значение 0. Таким образом, $(\forall a) (\sim x \vee$ $\vee \sim y)$ имеет значение 0, а его отрицание — значение 1. Других вариантов нет, а проверка со стороны заключения дает тот же результат. Значит формула есть тавтология.

Примем, далее, определения для прямой интерпретации формул $\vdash x$.

*D*2. Формула $\vdash x$ есть тавтология, если и только если x есть тавтология.

*D*3. Представительством высказывания x в классе формул следования будем называть множество формул следования, которые получаются так: 1) x путем эквивалентных преобразований приводится к виду $(\mathrm{K}^1 a^1) \ldots$ $\ldots (\mathrm{K}^n a^n)\, y$, где $\mathrm{K}^1, \ldots, \mathrm{K}^n$ есть какая-то комбинация из кванторов $\forall$ и $\exists$, а y есть $\sim a$, $a \vee b$ или ab; 2) $\sim a$ приводится к виду $c \vee d$ или cd; 3) к каждому из a и b в ab применяется 1 и 2; все это делается до тех пор, пока не получится множество формул вида $c \vee d$; если a или b есть элементарное высказывание, заменяем их соответственно на $a \vee a$ и $b \vee b$; 4) все эти формулы вида $c \vee$ $\vee d$ заменяются соответственно на формулы вида $\sim c \vdash d$, которые и образуют представительство x в классе формул следования.

Очевидно, для каждого высказывания может быть найдено его представительство в классе формул следования (согласно $D3$). В дальнейшем условимся, что для установления того, является высказывание тавтологией или нет, мы будем пользоваться методом отыскания его представительства в классе формул следования, т. е. примем следующее дополнение к прямой интерпретации: 5) высказывание имеет значение 1, если и только если все формулы, образующие его представительство в классе формул следования, имеют значение 1.

$MT1$. Высказывание есть тавтология, если и только если тавтологиями являются все формулы, образующие его представительство в классе формул следования.

$MT2$. Высказывание $(\forall a)\,x$ есть тавтология, если и только если x есть тавтология; аналогично для $(\exists a)\,x$.

$MT3$. Высказывание $(\mathrm{K}^1 a^1) \ldots (\mathrm{K}^n a^n)\,x$ есть тавтология, если и только если x есть тавтология (следует из $MT2$).

Изложенный способ приписывать значения истинности формулам $x \vdash y$ и $\vdash x$ делает излишней гипотезу, согласно которой область значения субъектов (индивидных переменных) непуста.

Рассмотрим систему S^6cq с аксиомной схемой $A5$, принятой в § 11 седьмой главы.

$MT5$. Если $x \vdash y$ доказуема в S^6_{cq}, то она есть тавтология (очевидно из вида аксиомных схем и правил вывода).

$MT6$. Если $x \vdash y$ есть тавтология, то она доказуема в S^6_{cq}.

Доказательство $MT6$ отличается от доказательства полноты S^s_{cq} лишь дополнительными случаями, когда в y фигурирует элементарное высказывание, отсутствующее в x. Если $x \vdash y$ есть тавтология, то тавтологией будет $x \vee \sim zz \vdash y$, где z есть любое высказывание, содержащее все те элементарные высказывания, которые входят в y и отсутствуют в x. Но в силу полноты S^s_{cq} формула $x \vee \sim zz \vdash y$ доказуема в S^6_{cq}, а формула $x \vdash x \vee \sim zz$

доказуема в силу S^6. Отсюда по правилу транзитивности получаем, что доказуема $x \vdash y$.

*МТ*7. Если $\vdash x$ доказуема в S^6_{cq}, то она есть тавтология (очевидно из вида аксиомных схем и правил вывода).

*МТ*8. Если $\vdash x$ есть тавтология, то она доказуема в S^6_{cq}.

Доказательство *МТ*8: если $\vdash x$ есть тавтология, то x есть тавтология; если x есть тавтология, то $\sim(\sim yy) \vdash x$ есть тавтология и доказуема в S^6_{cq}; но $\vdash \sim(\sim yy)$ доказуема, значит, согласно S^6 будет доказуема $\vdash x$.

Таким образом, для S^6_{cq} имеется процедура разрешимости: 1) если формула имеет вид $x \vdash y$, то достаточно выяснить, является она тавтологией (и в этом случае она доказуема) или нет (и тогда она недоказуема); 2) если формула имеет вид $\vdash x$ то вопрос о ее доказуемости сводится к вопросу о доказуемости формул, образующих представительство x в классе формул следования, т. е. к пункту 1.

Но система S^6_{cq} еще не эквивалентна классическому исчислению предикатов: наше определение тавтологии не совпадает с определением общезначимой формулы для классического исчисления предикатов. Так, формула $(\forall a)\, P(a) \supset P(b)$ общезначима, но не есть тавтология в нашем смысле. И в S^6_{cq} не будут доказуемы формулы $(\forall a)\, P(a) \vdash P(b)$ и $\vdash (\forall a)\, P(a) \supset P(b)$.

Рассмотрим систему S^k, которая образуется так. В определении $D2$ VII1 в пункте 3 остается только субъект, т. е. исключается квантификация предикатов. Принимается S^6_{cq} с этим ограничением и принимаются дополнительные аксиомные схемы A^k: $(\forall a)\, x \vdash y$ и $y \vdash (\exists a) x$, где y получается из x путем замены всех свободных вхождений a в x на b, причем, в x нет вхождений вида $(\forall b)\, z$ и $(\exists b)\, z$ таких, что a свободно входит в z.

Система S^k эквивалентна классическому исчислению предикатов в смысле таких теорем:

*МТ*9. Формула $x \vdash y$ доказуема в S^k, если и только если $x \supset y$ доказуема в классическом исчислении предикатов, *MT*10. Формула $\vdash x$ доказуема в S^k, если и только если x доказуема в классическом исчислении предикатов.

Построим систему S_i с тем же алфавитом и теми же определениями высказывания и формулы следования, что и в S^6_{cq}, и таким определением доказуемой формулы:

D^i. Формула $x \vdash y$ доказуема в S^i (есть формула переименования), если и только если y образуется из x путем замены нуля или более вхождений вида $(\forall a)\, z$ и $(\exists a)\, z$ соответственно на $(\forall b)\, v$ и $(\exists b)\, v$, где v образуется из z путем замены всех вхождений a в z на b, причем b не входит в z.

Для S^i имеется процедура разрешимости (она тривиальна и дана в D^i).

Класс формул следования, доказуемых в S^k, теперь можно разбить на три подкласса: 1) формулы, доказуемые в S^6_{cq}; 2) формулы переименования; 3) формулы, недоказуемые в S^6_{cq} и S^i (смешанные формулы). Можно строить различные системы, в которых будут доказуемы также и смешанные формулы. Они заключены в интервале между S^6_{cq} и S^k. Среди них возможны такие, для которых имеется процедура разрешимости. Такова, например, система S^r, задаваемая определением (S^6_{cq} и S^i предполагаются):

D^r. Формула $x \vdash y$ доказуема в S^r в таких и только таких случаях: 1) если найдется последовательность формул $x \vdash v$ и $v \vdash y$ такая, что каждая из этих формул доказуема в S^6_{cq} или S^i; 2) если $x \vdash y$ есть одна из аксиом A^k системы S^k.

Для S^r имеется простая процедура разрешимости. Для пункта 2 определения D^r она очевидна. Для пункта 1 она заключается в пересмотре всех возможных высказываний, образуемых из x или y путем переименования входящих в них связанных субъектов, или всевозможных пар таких высказываний, образуемых из x и y.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенная концепция логики нуждается в дальнейшей разработке с точки зрения отыскания подходящих формулировок проблемы полноты для ряда рассмотренных исчислений и модификаций их в зависимости от решения этих проблем, с точки зрения выяснения взаимоотношений этих исчислений, их возможных вариаций сужений и расширений. Интересно также выяснить, какие преимущества дает изложенная концепция в решении проблем логики и методологии науки. Пути подхода к последним частично намечены в работах [3, 4, 6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боброва Л. А.* Полнота систем вырожденного следования и квазиследования. «Неклассическая логика» (в печати).
2. *Боброва Л. А.* К проблеме логического следования.— «Вестник МГУ», № 2, 1966.
3. *Зиновьев А. А.* Основы логической теории научных знаний. М., 1967.
4. *Зиновьев А. А.* Комплексная логика.— «Исследование логических систем». М., 1970.
5. *Зиновьев А. А.* Комплексная логика (формальное построение).— «Неклассическая логика» (в печати).
6. *Зиновьев А. А.* Классические и неклассические ситуации в науке.— «Вопросы философии», 1968, № 9.
7. *Зиновьев А. А.* О пространственной и временной терминологии.— «Вопросы философии», 1969, № 5.
8. *Зиновьев А. А.* Логическое следование.— «Проблемы логики и теории познания». М., 1968.
9. *Ивин А. А.* Коннексивная импликация.—«Исследование логических систем». М., 1970.
10. *Сидоренко Е. А.* Варианты систем логического следования.— «Неклассическая логика» (в печати).
11. *Сидоренко Е. А.* Независимость в системах логического следования.— «Неклассическая логика» (в печати).
12. *Смирнов Г. А.* Доказательство основных теорем теории сильного логического следования.— «Логическая семантика и модальная логика». М., 1967.
13. *Смирнов Г. А.* О видах логического следования.— «Исследование логических систем». М., 1970.
14. *Федина А. М.* О полноте систем логического следования.— «Неклассическая логика» (в печати).
15. *Федина А. М.* О силлогистике классов.— «Неклассическая логика» (в печати).
16. *Щеголькова А. М.* Некоторые теоремы теории кванторов.— «Неклассическая логика» (в печати).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Александр Александрович Зиновьев

КОМПЛЕКСНАЯ ЛОГИКА

Утверждено к печати
Институтом философии АН СССР

Редактор *Н. И. Кондаков*
Технический редактор *Э. Л. Кунина, Л. Н. Золотухина*

Сдано в набор 26/I 1970 г. Подписано к печати 15/VI-1970 г.
Формат 84×108[1]/32 Бумага № 2
Условн. печ. л. 10,71 Уч.-изд. л. 8,1
Тираж 8800 экз. Т-10204 Тип. заказ № 228
Цена 49 коп.

Издательство «Наука».
Москва К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука»
Москва Г-99, Шубинский пер., 10.

49 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО · НАУКА ·